方嘉琳 编著

集合论

JIHELUN





吉林人民出版社

封面设计：庄元儁

统一书号：7091·1280
定　　价：七角二分

集合论

方嘉琳 编著

吉林人民出版社

集 合 论

方嘉琳　编著

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　8¼印张　178,000字

1982年4月第1版　1982年4月第1次印刷

印数：1—9,050册

书号：7091·1280　定价：0.72元

序　　言

集合论，自从一八七二年著名的德国数学家康托（Georg Cantor 1845—1918）作奠基性工作以来，集合论思想的应用愈来愈广泛。在现代数学各种课题的论述中，集合论语言精确简捷，叙述过程经济，深入问题本质，其观点方法已渗透到所有数学科目，以致在现代数学的发展进程中贡献卓著，现已成为学习现代数学所不可缺少的一个基础数学工具。

近年来，随着科学技术的飞速发展，生产建设的突飞猛进，作为其基础的数学科学的面貌也日新月异，数学教育现代化的呼声日趋高涨。世界上一些国家，诸如美、英、法、日、苏等，对中小学数学教育现代化都进行了一系列探索、研究和试验，尽管效果不一、众说纷纭，但中学数学增加集合、微积分、数理逻辑初步、概率统计等内容，并把这些内容同传统数学有机地结合起来，已成主流。在我国，为适应四个现代化的需要，在中学数学课程中已增添了部分集合内容或渗透了集合思想，这些不仅是完全必要的，也是切实可行的。

本书是介绍集合论的观点、方法的一本入门书，可供中学数学教师自修参考，也可供大学数学系学生选修集合论做为教材。在编写中注意和临近学科的联系，力求通俗、易于理解、便于自学。为了掌握方法，配有大量习题并附题解。

长春市教育学院张善才同志、东北师范大学许风同志、四平师范学院阎长明同志等曾对本书原稿提出一些宝贵意

见，在此表示感谢。

由于笔者水平所限，本书在体系上、题材处理上、方法选择上，定有不妥之处，望读者批评指正。

编　著　者

一九八〇年八月于四平

目　　录

第一章 集 合 (set)

§1. 元素和集合(elements and sets)

众所周知，数学有两个特点，一是抽象性，一是精确性。而数学概念的抽象总是由低级到高级、由特殊到一般地发展着。最原始的数学概念是数和几何图形，以后发展为函数、变换、对应、复数、微分、矩阵、泛函、环、域，以至无穷维空间、范畴、函子、层……。现在早已抽象到如此高度，初看起来它们似乎和实际失去了一切联系，只是感到莫明其妙、难于理解。但其实它们却都有着丰富的、十分现实的实际意义。正因它有高度的抽象性，才得以广泛的应用。

在抽象概念的描述和逻辑推理的过程中，数学的精确性自然要求运用准确的专门术语和记号，似是而非、含混其词的现象是绝对不能容许的。对于希望掌握现代数学的学者来说，必须熟练地准确地掌握这些专门术语和记号。为此，我们将严谨地定义每个新概念，仔细地说明每个新记号。读者一定要十分小心地运用这些概念和记号，千万不要发生任何丝毫的含混。尤其集合论的观点和方法，早已成为由具体到抽象的有力工具之一，它是现代数学各个分支的基础，更应十分熟练。

集合的概念是数学的一个基本概念，很难用更简单的概念来给它下定义，只能给予一种描述。关于集合的描述是多种多样的，诸如：

“凡说到集指的就是某些对象的汇集。”（*И. А. Фролов: Теория функции действительного переменного*, 1953. 中译本：*И. А.* 福罗洛夫：《实变函数论》)。

“凡是具有某种特殊性质的东西的全体即称之为集。”（*И. П. Натансон: Теория функций вещественной переменной*. 1950. 中译本，*И. П.* 那汤松：《实变函数论》)。

“所谓集合乃是可以互相区别的事物的汇集”，（河田敬义：《集合·位相·测度》，1957·中译本：《集合·拓扑·测度》）

“若干个（有限或无限多个）固定事物的全体叫做一个集合”。（张禾瑞著：《近世代数基础》，1978年修订本）。

“某些指定的‘东西’集在一起就成为集合”。（欧阳光中编《集合和映射》，1978）。

看一些参考书会发现集合的概念各有不同的描述。由于描述方式不同，对于集合可以有不同的理解。显然这是不能容许的。关于什么是集合，必须有一个确切的不容模糊的描述。例如

“相当大的数的全体”

是不是集合呢？“相当大的数”虽然也是一种特殊性质，但它是不确定的。所谓相当大的数是大到什么程度呢？是无法断定的，界限是不清的。一万是否在这个集合里？一亿是否在这个集合里？都无从得知。因此它不能做为我们讨论的对象——集合。同样的

“充分接近于某点 p 的点全体”

也是不确定的。接近到什么程度才算是充分接近是无法判定的。可见，关于集合的描述只强调特殊性是不够的，必须注意“确定”二字。任何事物对于一个集合来说，或者是该集

合的事物，或者不是，二者恰有一个成立。由该集合的性质完全确定，决不容许有界限不清、无法判断的现象。

“当a，b为实数，不等式$ax>b$的实数解全体”这个性质是确定的性质，当然它是一个集合。而

“$ax>i$的解全体”

是否是集合呢？这不能是集合。因为复数是不能比较大小的，$ax>i$并不能刻划一种性质，这个不等式本身是没有意义的，无法判定一个数是否满足这个关系。因而也不能是集合。

关于集合的描述还要注意事物的区别性，否则在讨论集合的基数以及集合的并集时将产生混乱。为此，我们给予集合的描述是：

“凡是具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体就是一个集合(*set*)或简称为集”。

集合的概念在数学中是到处可见的。如

“自然数的全体”。

“平面上过某点的一切直线”。

“某几何图形上的点全体”。

“平面上和已知点的距离为定长的点的轨迹”。

“方程$ax^2+bx+c=0$的根的全体”。

“区间（a，b）内点的全体”。

“以11为模剩余为7的自然数全体”。

“从七个事物中每次取二个的组合全体。”

“n维*Euclid*空间中线性变换的全体”。

“$[0，1]$上连续实值函数的全体”。

“1的n次根的全体”。

“某批产品中次品的全体”。

"某项随机试验所有可能的结果"。

"实数域上$m\times n$矩阵的全体"。

"实数收敛序列的全体"。

在各个学科中都可以举出大量的集合的例子。

"设n为自然数，在n^2与$(n+1)^2$之间没有质数的n的全体"是否是集合呢？尽管这个问题直到现在还没有解决，但它是集合。完全符合集合概念的要求。只是人们的科学水平的限制，到现在还不认识集合中有哪些元素而已。

"长春市十年来平均气温的全体"

根据气象台的记载，这显然是一个集合，而

"长春市年平均气温的全体"

是否是集合呢？是集合。所有可能成为年平均气温的数都属于这个集合，而不是有记录记载的那些数据。因为明年年平均气温是多少，在记录上未必查得到。在数理统计中常遇到这类集合。

由于构成集合的事物可以是任何事物，以致集合的观点可以广泛地应用到各个学科中去。研究集合时，不考虑构成集合的事物的特殊性质，而仅仅研究集合本身的一般性质的数学分支称为**集合论**（*set theory*）。

类（*class*），**族**（*family*），**丛**（*collection*），**汇集**（*aggregate*）等都是集合的同义语。

设A是集，a是一个事物。若a是A的一个事物，则称a为A的**元素**（*element*）或a**属于**（*belong*）A，或者A含有（*contain*）a。

一般地，我们用大写字母A，B，C，M，N，X，Y，……表示集合；而用小写字母a，b，c，m，n，x，y，……表示元素。A的元素也称为A的点(*point*)或A的元(*mem-*

ber)。

元素和集合间的属于关系常应用*G.Peano*记号表示，a 属于A记作

$$a\in A \qquad \text{或} A\ni a.$$

若a不是A的元素，则称为a不属于A，或A不含有a，记作

$$a\overline{\in} A,\ a\notin A \qquad \text{或} A\not\ni a。$$

若集合A含有四个点a，b，c，d，则写做

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}。$$

$\{a\}$与a的含义是不同的，a是一个元素，而$\{a\}$是由a一个元素组成的集合。

还应注意$\{a,\ a,\ a\}$是否是三个元素a的集合呢？不是，它只有一个元素a，只能记做$\{a\}$，不能表示为$\{a,\ a,\ a\}$，否则在讨论集合的运算时，将发生混乱。

当集合A的元素可以全部列出时，则可将它全部列出，用花括号括起来表示这个集合。如记作

$$A=\{a_1,\ a_2,\cdots\cdots,a_n\}.$$

这类集只含有有限个元素，称之为**有限集**(*finite set*)。

当集合含有无限多个元素时，不可能将它全部排列出来，为了表示这种集合，常在符号上明确表示出元素的特性，而以

$$\{x:x\text{具有性质}P\}$$

或

$$\{x\mid x\text{具有性质}P\}$$

表示具有性质P的事物的全体。如集合

$$\{x:x>0\}$$

表示正数集；集合

$$\{x \mid a \leqslant x < b,\ a, b\text{为实数}\}$$

表示区间 $[a, b)$；集合

$$\{x: x \in [a, b] \text{ 且 } f(x) \geqslant g(x)\}$$

表示在区间$[a, b]$中，满足$f(x) \geqslant g(x)$的点全体；集合

$$\{(x, y): x^2 + y^2 = 1,\ x, y\text{为实数}\}$$

表示平面上的单位圆周；集合

$$\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x, y, z\text{为实数}\}$$

表示三维空间中的单位球体；集合

$$\{x: x = 11n + 7,\ n = 0、1、2,\ \cdots\cdots\}$$

表示以11为模、剩余为7的自然数集。

上述这些集合都不是有限集，称为无限集(*infinite set*)。但这个记号也适用于有限集。如

$$\{x_i: i = 1, 2\}$$

表示 $\{x_1, x_2\}$。

再举些较为复杂的例子：

例 1：在三维空间中，集合

$B(P, a) = \{(x, y, z): P = (a, b, c),\ a$为正实数，$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} \leqslant a\}$

表示以P点为球心，以a为半径的球体。集合

$$\{B(P, a): a\text{为某正实数，}P\text{为三维空间的任一点}\}$$

表示三维空间中，所有以a为半径的球为元素的集合。而集合

$$\{B(P, a): P\text{为三维空间的定点，}a\text{为任意正实数}\}$$

表示三维空间中，所有以P点为心的球为元素的集合。

例 2：设P为取定的自然数，集合

$$A_k^{(p)} = \{x: x = np + k,\ o \leqslant k < p,\ n\text{为任意非负整数}\}$$

为以P为模、剩余为k的自然数集。而集合

$$\{A_k^{(p)}:\ k=0,\ 1,\cdots\cdots,\ p-1\}$$

为以P为模的剩余类集。这个集合的元素不是数而是数集。这样的以集合为元素的集合常称为集族（*family of sets*），它本身也是集合。

例 3：集合

$$\{(x,\ y,\ z):x^2+y^2=z^2,\ x,\ y,\ z\text{为自然数}\}$$

表示满足不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的自然数解．通常叫做勾股数。如(3，4，5)，(5，12，13)，(7，24，25)，(8，15，17)，(20，21，29)都属于这个集合。但想将这个集合的所有元素全部列出来是不可能的。而集合

$$\{(x,\ y,\ z):\ x^n+y^n=z^n,\ x,\ y,\ z\ \text{为自然数}\}$$

表示满足不定方程

$$x^n+y^n=z^n$$

的自然数解。当$n=4k$时，这个方程没有解，故这个集合不含有元素。而对任意自然数n，这个方程是否有解，对于$n>7000$至今还不了解。*Fermat*曾经猜测这种方程当$n>2$时没有自然数解，人们将此猜测称为**Fermat 大定理**。集合

$$\{n:\ x^n+y^n=z^n\text{有自然数解}\}$$

表示使不定方程$x^n+y^n=z^n$有自然数解的n的集合。能否说这个集合只含有1和2呢？不能。因*Fermat*猜测还没能证明，没有证明的猜测是不能做为论证问题的依据的。那么它是否是集合呢？它是集合，完全符合集合的要求。不过这个集合含有哪些数还不能回答。

最后，应当指出集合的概念本身是蕴含着矛盾的。如第三章§6一切基数的集合以及第四章§4一切序数的集合都是

不可想像的。今再举一个例子。集合

$$Q=\{x:\ x\notin x\}\ 。$$

是 *Russell*（1872—1970）举出的例子，这个有名的例子称为 Russell 悖理。他把所有集合分为两类，如果集合A是A的一个元素，即 $A\in A$，称A 为第一类的集合，否则称为第二类的集合。则Q 为所有第二类的集合所组成的集合。那么，Q是第一类集合还是第二类集合？

如果 Q是第一类的集合，即 $Q\in Q$。但因 Q 的任何元素x，都具有性质$x\notin x$，故必有$Q\notin Q$即产生矛盾，故Q不能是第一类的集合。

如果Q是第二类的集合，即$Q\notin Q$。由Q的做法知，Q应该是Q的元素。即$Q\in Q$，矛盾。故Q不能是第二类的集合。

这个反例说明集合概念本身是蕴含矛盾的。

集合论作为纯粹数学的一个分支，已有一百多年的历史。首先由德国数学家 *G. Cantor* 在19 世纪末导入集合的概念。之后，集合的观点和方法迅速地渗透到数学的所有分支，而改变了数学的面貌。对现代数学的发展，起着巨大的作用。集合的概念在数学的任何部门中都是最重要的基础。因此 *Russell* 悖理在数学界引起了极大的反响，从而诞生了数学基础论。为了避开悖理而建立了所谓公理集合论。本书不做进一步的介绍，只须注意我们思考的对象都是事前完全确定的范畴之内的事物，不能虚幻渺茫，漫无边际，否则将陷入矛盾百出的境地。

总之，我们讨论的集合是朴素意义下的集合，为了避开悖理而要加以限制，即在确定的范围内展开讨论。这个范围通常称为全域（*universe*）。

习　　题

1. 试用集合的记号表示下列各集合：

   a. 偶数集。

   b. 以7除余5的自然数集。

   c. 在a_1，a_2，……，a_n中每次取两个构成的集合。

   d. 不等式$ax+b>0$的解集。

   e. 正切为1的角集。

   f. 实二阶非蜕化矩阵集。

   g. 比1大，比20小被3整除的整数全体的集合。

2. 判定下列各事物的全体是否是集合：

   a. $\{x: x+2>x$，x为实数$\}$。

   b. $\{x: |x-a|$为充分小数，a为实常数，x为实数$\}$。

   c. $\{x: x>n$，n为任意自然数，x为实数$\}$。

   d. $\{x: \sin x=0$，x为实数$\}$。

   e. $\{a, b, c, a\}$。

   f. $\{x: x^n=a\}$。

3. 说明下列各集合的意义：

   a. $\{x: f(x)\geqslant g(x), h(x)=0\}$。

   b. $\{(x, y): x+y=1$，x，y均为非负实数$\}$。

   c. $\{x: x=a\}$。

   d. $\{x: x=a$或$x=b\}$。

   e. $\{x: x\neq x\}$。

   f. $\{(x, y): (x-a)^2+(y-b)^2=1, x-y=a-b\}$。

   g. $\{x: x\in s$，s为某平面图形$\}$。

   h. $\{x_i: i=1, 2, \cdots\cdots, n\}$。

   i. $\{(x_i, y_j): i=1, 2, 3, j=1, 2\}$。

   j. $\{x_i: i=1, 2, \cdots\cdots\}$。

   k. $\{x: x|a$，a为某自然数，x为自然数$\}$。

l. 设N为自然数集，$\{n: n\in N, 7\mid n\}$。

m. $[x]$表示不超过x(实数)的最大整数，$\{x: x\in R, [x]=6\}$。

4. 试区别下列二集：

a. $F_1=\{f(x)$：当$a<x<b$时，有$|f(x)|<K$。K为常数$\}$。

b. $F_2=\{f(x)$：存在正整数K，当$a<x<b$时，$|f(x)|<K\}$。

5. 试表出下列各种实数序列的集合：

a. 有界数列全体组成的集合。

b. 收敛数列全体组成的集合。

c. 平方和收敛的数列全体组成的集合。

d. 绝对值级数是收敛的数列全体组成的集合。

6. 在确定的平面上，用集合表示下列各种图形的全体：

a. 平行四边形。

b. 正三角形。

c. 菱形。

7. 以(x, y)表示平面上点的坐标，试用图形表示下列各点集：

a. $\{(x, y): 2x-y<1\}$。

b. $\{(x, y): x+y>0, x-y>0\}$。

c. $\{(x, y): x^2+(y-1)^2=1\}$。

d. $\{(x, y): (x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 1, y>x\}$。

§ 2. 包含关系(relation of inclusion)

先介绍一些在我们叙述中常用的一些术语。

“当且仅当”表示在这个时候而且仅在这个时候；

“要充条件”表示必要和充分条件；

设α，β为两个数学命题，则下述的各种说法是等价的，即那些叙述中的任意两个都恰有相同的意义：

“α意味着β” 或 “α蕴含β”，

“α是β的充分条件”，

“β是α的必要条件”，

“如果有α则有β”，

“$\alpha \to \beta$”。

同样，下述几种形式也是等价的：

“当且仅当α成立时β成立”，

“α是β的要充条件”，

“β是α的要充条件”，

“α蕴含β且β蕴含α”，

“$\alpha \Longleftrightarrow \beta$”。

定义 1：当且仅当集合A的元素都属于集合B时，称集合A为集合B的**子集**（*subset*）或者说集合B**包含**（*contain*）集合A，或者说集合A被集合B包含（*contained*）。记作

$$A \subseteq B \quad 或 B \supseteq A。$$

这个定义实际意味着下列两个叙述：

（1）如果集合A是集合B的子集，则集合A的每个元素都是集合B的元素；

（2）如果集合A的每个元素都是集合B的元素，则集合A是集合B的子集。

这个叙述等价于下述：

（1）如果集合A不是集合B的子集，则集合A必有一个元素不是集合B的元素；

（2）如果集合A有一个元素不是集合B的元素，则集合A不是集合B的子集。

集合A不是集合B的子集通常记作

$$A \nsubseteq B \quad 或 \quad B \nsupseteq A。$$

由定义可直接看出，对于任意集合 A 必有 $A\subset A$，即A是A的子集。今再举些例子。

质数集是自然数集的子集。

有理数集是实数集的子集。

直角三角形集是三角形集的子集。

整数集不是正有理数集的子集。

$\{0\}$ 不是自然数集的子集。

$\{1\}$ 不是质数集的子集。

质数集不是奇数集的子集。

锐角三角形集不是等腰三角形集的子集。

$\{(x, y): x^2+y^2=1\}$ 是 $\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的子集。而不是 $\{(x, y): x^2+y^2<1\}$ 的子集。

三维空间中单位球面是单位球体的子集。

n维 *Euclid* 空间的非蜕化线性变换集是线性变换集的子集。

$[0, 1]$ 上可微函数集是$[0, 1]$ 上连续函数集的子集。

$[0, 1]$ 上连续函数集是 *Riemann* 可积函数集的子集。

以 6 为模、剩余为 3 的自然数集 $A_3^{(6)}$是 3 的倍数集 $A_0^{(3)}$的子集，但在剩余类集中$A_3^{(6)}$并不是$A_0^{(3)}$的子集。

实际上，$A_3^{(6)}=\{3, 9, 15, 21, \cdots\cdots\}$,

$A_0^{(3)}=\{3, 6, 9, 12, \cdots\cdots\}$

故有$A_3^{(6)}\subset A_0^{(3)}$。

在剩余类集 $\{A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_0^{(3)}, A_1^{(3)}, A_2^{(3)}, \cdots\cdots\}$ 中，$A_0^{(3)}$及$A_3^{(6)}$都是它的元素，而$A_3^{(6)}$并不是 $A_0^{(3)}$ 的子集。

我们已经看到A是 B 的子集意味着若 $a\in A$则$a\in B$。若

A不是B的子集，则必有$a\in A, a\notin B$。对于任意二集合A, B来说，或者A的元素全属于B，或者A的元素不全属于B，二者必居其一。于是我们推出

定理 1：若A，B是集合，则或者$A\subset B$，或者$A\not\subset B$。

定义 2：当且仅当集合A是集合B的子集，而集合B也是集合A的子集时，称为集合A与集合B**相等**（*equal*），记作

$$A=B。$$

显然$A=B$当且仅当它们有相同的元素。

例如：

$$\{x:\ x^2-5x+4=0\}=\{1,4\}。$$

$$\{x:\ 3x>2\}=\text{区间}\left(\frac{2}{3},\ \infty\right)。$$

正整数集=自然数集。

区间$(a,\ b]\neq$区间$[a,\ b)$。

$\{x:\ a^x=y,\ y>0,\ x$为实数$\}=\{x:\ x=\log_a y,\ y>0,\ x$为实数$\}$。

设$f(x)$为实值函数，则$\{x:\ f(x)>0\}=\{x:\ -f(x)<0\}$。

定义 3：当且仅当$A\supset B$且$A\neq B$时称集合B为集合A的**真子集**（*proper subset*）。记作

$$A\supsetneqq B \quad 或 \quad B\subsetneqq A。$$

在前面列举的子集例子中，除A不是A的真子集外，其余的都是真子集。故不另外举例了。

定义 4：不含任何元素的集合称为**空集**（*empty set*），记作

$$\Phi。$$

下述诸集都是空集：

$\{x: x^2+1=0, x$为实数$\}$。

$\{(x, y): x^2+y^2<0\}$。

$\{x: x=\text{tg}\frac{(2k+1)\pi}{2}, x$为实数, k为非负整数$\}$。

$\{x: x\neq x\}$。

$\{(x, y, z): x^4+y^4=z^4, x, y, z$为自然数$\}$。

$\{y: y=a^x, x$为实数, $a>0, y<0\}$。

因ϕ不含任何元素，故对于任意集A，$\phi\not\subset A$一定不成立。由定理1推得空集是任何集的子集。即

定理 2：对于任意集A，恒有$\phi\subset A$。

由包含关系的定义可直接推得

定理 3：若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

即集合间的包含关系满足可迁性。

自然想到一个n元素集能有多少个子集的问题。例如集合

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

的子集，有不含元素的空集ϕ，恰有C_5^0个；及

含1个元素的子集，恰有C_5^1个；

含2个元素的子集，恰有C_5^2个；

含3个元素的子集，恰有C_5^3个；

含4个元素的子集，恰有C_5^4个；

含5个元素的子集，恰有C_5^5个。

合计共有

$$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5$$

个子集。这恰是二项式定理的结果。一般地，n元素集的一切子集共有2^n个。

定义 5：集合A的一切子集的集合称为A的**幂集**(*pow-*

er set)，记作

$$p(A)。$$

显然 $\phi\in p(A)$，$A\in p(A)$，$\{x\}\in p(A)$ 的要充条件是 $x\in A$。$B\in p(A)$ 的要充条件是 $B\subset A$。

值得注意的是记号“$\in$”和“$\subset$”的含义是不同的。元素和集合之间有“$\in$”关系，而子集和集合之间有“$\subset$”关系。元素和集合之间没有“$\subset$”关系，而子集和集合之间没有“$\in$”关系。故不能说“$\{x\}\subset A$”同“$x\subset A$”。

数学理论一般是在确定的范围里展开讨论的，如整数的整除性是在小学算术中自然数集里讨论的。因式分解、代数分式是在有理数集中讨论的。而根式、对数等是在实数集中讨论的。容易看出，一切数学理论都是在一定的集合上展开的。范围不同结果也可能不同。如讨论方程的根，在有理数集中

$$\{x:\ x^2-2=0\}=\phi,$$

而在实数集中

$$\{x:\ x^2-2=0\}=\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}。$$

用 $d(0,P)$ 表示 P 点和原点的距离，则在直线上有

$$\{P:\ d(0,\ P)=1\}=\{-1,1\},$$

而在平面上有

$$\{P:\ d(0,\ P)=1\}=\{(x,y):x^2+y^2=1\}。$$

故在数学理论中必须明确是在什么范围内讨论的。这个范围往往是某个确定的集合 Ω。Ω 称为该理论的**普遍集合**(*universal set*)或**全域**(*universe*)。在几何的表现中，Ω 称为空间(*space*)或抽象空间(*abstract space*)，Ω 的元素称为点(*point*)，Ω 的子集称为点集(*point set*)。如 n 维 *Euclid* 空间，线性空间，度量空间，拓扑空间，*Hilbert* 空间，

$Banach$空间，拓扑线性空间等。

习　　题

1．说明下列各集的意义：

a．$\{y:\ y\subset A\}$。

b．$\{x:\ x\in A\}$。

c．$\{y:\ B\subset y\subset A\}$。

d．$\{y:\ a\in y\subset A\}$。

e．$\{y:\ A\subset y\in \mathfrak{M}\}$。

f．$\{y:\ a\in y\in \mathfrak{M}\}$。

2．判定下列等式是否成立：

a．$\{x:\ |x|<\frac{1}{n}$，n为任意自然数$\}=\phi$。

b．$\{x:\ x^2+1=0\}=\phi$。

c．$\{x:\ x>n$，n为任意自然数$\}=\phi$。

d．$\{x:\ \sin x>1\}=\phi$。

3．设$A=\{a,\ b,\ c\}$，试写出A的幂集$p\ (A)$，并计算出它的元素个数。

4．说明下列各集的意义：

$\{\phi\}$，$\{\{\phi\}\}$，$\{a\}$，$\{\{a\}\}$，$\{a,\ b\}$，

$\{\{a,b\}\}$，$\{A\}$，$\{A,\ B\}$，$\{\{A\},\ \{B\}\}$。

5．试讨论下述关系是否成立：

a．$\{\phi\}\subset A$。

b．$\phi\in A$。

c．$\phi\subset A$。

d．$\{\phi\}\in A$。

e．$\{\phi\}\in p(A)$。

f．$\{\phi\}\subset p(A)$。

g．$A\in p(A)$。

h．$A\subset p(A)$。

i. $\{A\} \in p(A)$。

6. 设$A = \{a, b, c, d\}$，试写出A的一切真子集。

§ 3. 集合的并和交(union and intersection of sets)

定义 1：由集合A与集合B的一切元素组成的集合，称为集合A与集合B的**并集** (*union*)，记作

$$A \cup B。$$

即$C = A \cup B$表示A与B的元素皆在C中，而C的元素也必至少在A与B之一中。可以表示为

$$C = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}。$$

定义 2：由集合A与集合B的公共元素组成的集合，称为A与B的**交集** (*intersection*)，记作

$$A \cap B。$$

即$C = A \cap B$表示C的元素既属于A也属于B，而既属于A又属于B的元素皆在C中。可表示为

$$C = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}。$$

例 1. 设

$$A = \{a, b, e\}, \quad B = \{b, c, d\},$$
$$C = \{c, e, g\}, \quad D = \{a, b, d, f\},$$

则

$$A \cap B = \{b\},$$
$$A \cap D = \{a, b\},$$
$$B \cap D = \{b, d\},$$
$$C \cap D = \phi。$$

而

$$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\},$$
$$B\cup C=\{b,\ c,\ d,\ e,\ g\},$$
$$C\cup D=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\}。$$

要注意 $A\cup B$ 不得写为

$$\{a,\ b,\ c,\ b,\ d,\ e\},$$

这在§1 中已经指出过。

例 2．设

$$A=\text{区间}[0,\ 2],\quad B=\text{区间}[1,\ 3],$$

则

$$A\cup B=\text{区间}[0,\ 3],$$
$$A\cap B=\text{区间}[1,\ 2]。$$

关于多个集合的运算可用括号表明运算的次序。如

$$A\cup B\cap C。$$

若添加括号为

$$(A\cup B)\cap C,$$

则表示先计算 $A\cup B$，然后再求它和 C 的交。
若添加括号为

$$A\cup(B\cap C),$$

则表示先计算 $B\cap C$，然后再求它和 A 的并。一般来说两者是不相等的。如上例 1 中

$$(A\cup B)\cap C=\{c,\ e\},$$
$$A\cup(B\cap C)=\{a,\ b,\ c,\ e\},$$

关于有限多个集合的并（交），可以归纳定义之。如

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cup B\cup C\cup D=(A\cup B\cup C)\cup D;$$
$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C,$$

$$A\cap B\cap C\cap D=(A\cap B\cap C)\cap D。$$

等等。一般的有

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n$$
$$=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n,$$
$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_{n-1}\cap A_n$$
$$=(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_{n-1})\cap A_n。$$

关于并、交运算有下述定理：

定理 1：下列诸运算律成立：

（1）**并的交换律**（*commutative law*）

$$A\cup B=B\cup A。$$

（2）**并的结合律**（*associative law*）

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C。$$

（3）**交的交换律**

$$A\cap B=B\cap A。$$

（4）**交的结合律**

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C。$$

（5）**并交分配律**（*distributive law*）

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

（6）**并交幂等律**（*idempotent law*）

$$A\cup A=A\cap A=A。$$

（7）**并交吸收律**（*absorption law*）

$$A\cup(B\cap A)=A\cap(B\cup A)=A。$$

七个运算律的证明方法相同，以（5）的前式为例证明于下，其它留给读者。

证明：为了证明等式成立，需要证明等式的两端互相包含，为此，先证

$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

若$A\cap(B\cup C)=\phi$,则由§2定理2知这个结论是正确的。

若$A\cap(B\cup C)\neq\phi$，设$a\in A\cap(B\cup C)$,
则由定义2，有

$$a\in A \quad 且 a\in B\cup C。$$

由定义1，

$$a\in B\cup C \quad 即 \quad a\in B \quad 或 \quad a\in C,$$

故

$$a\in A \quad 且 \quad a\in B \quad 或 \quad a\in A \quad 且 \quad a\in C。$$

由前者有

$$a\in A\cap B,$$

由后者有

$$a\in A\cap C,$$

故由定义1

$$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

于是

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)。$$

其次证明：

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)。$$

若$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\phi$，则由§2 定理2，这个结论是正确的。

若$(A\cap B)\cup(A\cap C)\neq\phi$，设$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
则由定义1有

$$a\in A\cap B \quad 或 \quad a\in A\cap C。$$

若$a\in A\cap B$，则由定义2有

$$a\in A \quad 且 \quad a\in B,$$

若$a\in A\cap C$，同理有

$$a \in A \quad 且 \quad a \in C。$$

在前种情形有

$$a \in B \subset B \cup C,$$

从而

$$a \in A \cap (B \cup C)。$$

在后种情形，同理有 $a \in B \cup C$，从而

$$a \in A \cap (B \cup C)。$$

总之，必有

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C),$$

由§2 定义 2 有

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)。$$

习　　　　题

1. 试证并交吸收律。

2. 若

$$A \cup B \subset A \cap B,$$

则

$$A = B。$$

3. 若 $A \subset B$，C 为任一集合，则必有

$$A \cup C \subset B \cup C,$$
$$A \cap C \subset B \cap C。$$

4. 求出下列各集：

(a) $\{y: B \subset y \subset A\} \cup \{y: C \subset y \subset A\}$。

(b) $\{y: a \in y \subset A\} \cap \{y: b \in y \subset A\}$。

(c) $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x, y): x + y = 1\}$。

(d) $\{x: f(x) - g(x) \geqslant 0\} \cap \{x: g(x) - f(x) \geqslant 0\}$。

(e) 奇数集 $\cap$ 正数集。

(f) $\{0\} \cup$ 自然数集。

5. 设 A 为平面上所有矩形的集合，B 为平面上所有菱形的集合，求出

$$A\cup B \quad 及 \quad A\cap B。$$

6. 设A为被整数K整除的整数集，B为被整数L整除的整数集，试求出

$$A\cup B \quad 及 \quad A\cap B。$$

7. 设A为任意集合，则

$$A\cap\phi=\phi,\quad A\cup\phi=A。$$

8. 试证 $A=A\cap B \Longleftrightarrow A\subset B$，

$$A=A\cup B \Longleftrightarrow A\supset B。$$

9. 设 A_i = 区间 $(-\frac{1}{i},\ \frac{1}{i})$，试求出

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad 及 \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i。$$

10. 设 A_i = 区间 $(\frac{1}{i},\ i)$，试求出

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad 及 \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i。$$

11. a. 若对于任意集合M，都有$A\cup M\subset B\cup M$，则$A\subset B$。

 b. 若对于任意集合M，都有$A\cap M\subset B\cap M$，则$A\subset B$。

12. 对某个M有$A\cup M\subset B\cup M$，是否能推出$A\subset B$？

13. 举例指出下列各结果的逆式不成立：

 a. 若$B=C$，则$A\cup B = A\cup C$。

 b. 若$B=C$，则$A\cap B=A\cap C$。

 c. 若$B=C$，则$A-B=A-C$。

14. 若$A\cup B=M\cup N$，$A\cap N=\phi$，$B\cap M=\phi$，则$A=M$，$B=N$。

§ 4. 补集及对称差(complement and symmetric difference)

定理 1： 对于全域S的任意集合A，存在唯一的集合X，

满足

$$A \cup X = S,\quad A \cap X = \phi。$$

证明：令

$$X = \{x:\ x \in S \text{ 且 } x \notin A\},$$

则X满足

$$A \cup X = S,\quad A \cap X = \phi。$$

假设另有集Y满足条件，则

$$A \cup Y = S,$$

$$A \cap Y = \phi。$$

因此

$$Y = Y \cap S = Y \cap (A \cup X) = (Y \cap A) \cup (Y \cap X)$$

$$= Y \cap X。$$

同样可推得

$$X = Y \cap X。$$

故 $$Y = Y \cap X = X。$$

定义 1：满足条件

$$A \cup X = S,\quad A \cap X = \phi$$

的集合X称为集合A关于全域S的补集(*Complement*)，记作

$$X = \mathscr{C}_s(A)。$$

在不致发生误解时，简称为A的补集，记作

$$X = \mathscr{C}(A)。$$

故A在S中的补集，即S中所有不在A中的元素的集合。

定理 2：设A为S的子集，则有下列关系成立。

(1) $\mathscr{C}(\mathscr{C}(A)) = A$,

(2) $\mathscr{C}(\phi) = S$, $\mathscr{C}(S) = \phi$。

证明：由定义 1 知$\mathscr{C}(\mathscr{C}(A))$为唯一满足

$$\mathscr{C}(A) \cup X = S,\quad \mathscr{C}(A) \cap X = \phi$$

的集合。而由A的补集的定义知

$$\mathscr{C}(A)\cup A=S,\quad \mathscr{C}(A)\cap A=\phi$$

成立。故

$$\mathscr{C}(\mathscr{C}(A))=A。$$

（2）由定义可直接推得。

定理 3：设 A, B 为 S 的子集，则$A\subset B$ 的要充条件是$\mathscr{C}(B)\subset\mathscr{C}(A)$。

证明：**必要性**：若 $a\in\mathscr{C}(B)$，则 $a\notin B$ 。因 $A\subset B$，故$a\notin A$，即$a\in\mathscr{C}(A)$，所以$\mathscr{C}(B)\subset\mathscr{C}(A)$。

充分性：若 $a\in A$, 则 $a\notin\mathscr{C}(A)$，因 $\mathscr{C}(B)\subset\mathscr{C}(A)$, 故$a\notin\mathscr{C}(B)$， 即$a\in B$，所以$A\subset B$。

定理 4：（对偶原理）（*De Morgan law*）设A，B 为 S 的子集，则

（1）$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)$，

（2）$\mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}(A)\cup\mathscr{C}(B)$。

证明：要证明（1），先证

$$\mathscr{C}(A\cup B)\subset\mathscr{C}(A)\cup\mathscr{C}(B)。$$

由§3 定义 1 有

$$A\subset A\cup B\quad 及\quad B\subset A\cup B,$$

由定理 3 有

$$\mathscr{C}(A\cup B)\subset\mathscr{C}(A)\quad 及\ \mathscr{C}(A\cup B)\subset\mathscr{C}(B),$$

故由§3 定义 2 有

$$\mathscr{C}(A\cup B)\subset\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)$$

其次证明

$$\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)\subset\mathscr{C}(A\cup B)。$$

当$\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)=\phi$时，由§2 定理 2 知上式成立。若$\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)\neq\phi$, 设$\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)\ni a$，则$a\in\mathscr{C}(A)$且$a\in\mathscr{C}(B)$,

即$a\notin A$且$a\notin B$，$a\notin A\cup B$，故$a\in\mathscr{C}(A\cup B)$，

亦即 $$\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)\subset\mathscr{C}(A\cup B)。$$

由§2 定义2有

$$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}(A)\cap\mathscr{C}(B)。$$

（2）的证明请读者练习。

定义 2：集合A的元素但非集合B的元素的全体，称为A与B的**差集**（*difference set*），记作

$$A\setminus B\quad 或\quad A-B。$$

由定义可知$A\setminus B=\{x:x\in A且x\notin B\}$，即$B$关于$A$的**补集**或**相对补集**（*relative complement*）。如果A为全域S，则$A\setminus B$即$\mathscr{C}(B)$。这时$A\setminus B$也称为**正常差**（*proper difference*）。

定义 3：集合A的元素但非集合B的元素及集合B的元素但非集合A的元素的全体称为A与B的**对称差**（*symmetric difference*），记作

$$A\triangle B。$$

即$A\triangle B=A\setminus B\cup B\setminus A$。

例 1：设全域$S=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$，

$$A=\{a,\ b,\ c\},\quad B=\{c,\ d,\ e\},$$

则

$$\mathscr{C}(A)=\{d,\ e,\ f\},\quad \mathscr{C}(B)=\{a,\ b,\ f\}$$

$$A\setminus B=\{a,\ b\},\quad B\setminus A=\{d,\ e\},$$

因而 $$A\triangle B=\{a,\ b,\ d,\ e\}。$$

例 2：设全域S为区间$[1,\ 5]$，A为区间$[1,\ 3]$，B为区间$[2,\ 4]$，则

$$\mathscr{C}(A)=(3,\ 5]$$

$$\mathscr{C}(B)=[1,\ 2)\cup(4,\ 5]$$

$$A\setminus B=[1,\ 2)$$

$B \setminus A = (3, 4]$

$A \triangle B = [1, 2) \cup (3, 4]$。

由定义可推出

引理：$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$= (A \cap \mathscr{C}(B)) \cup (B \cap \mathscr{C}(A))$。

由定义还可推得

定理 5：关于对称差，下述关系式成立：

（1）交换律：$A \triangle B = B \triangle A$,

（2）结合律：$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,

（3）分配律：$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

（4）$A \triangle \phi = A$, $A \triangle S = \mathscr{C}(A)$,

（5）$A \triangle A = \phi$, $A \triangle \mathscr{C}(A) = S$.

（6）$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$。

由定义可直接推得（1），（2），（4），（5），故只需证明（3），（6）。

证明：首先证明（3）。由引理有

$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = [(A \cap B) \cap \mathscr{C}(A \cap C)] \cup [(A \cap C) \cap \mathscr{C}(A \cap B)]$

由对偶原理得

$= [(A \cap B) \cap (\mathscr{C}(A) \cup \mathscr{C}(C))] \cup [(A \cap C) \cap (\mathscr{C}(A) \cup \mathscr{C}(B))]$

由分配律得

$= \{[(A \cap B) \cap \mathscr{C}(A)] \cup [(A \cap B) \cap \mathscr{C}(C)]\} \cup \{[(A \cap C) \cap \mathscr{C}(A)] \cup [(A \cap C) \cap \mathscr{C}(B)]\}$

因 $A \cap \mathscr{C}(A) = \phi$，**故**

$= [(A \cap B) \cap \mathscr{C}(C)] \cup [(A \cap C) \cap \mathscr{C}(B)]$

由结合律，有

$=[A\cap(B\cap\mathscr{C}(C))]\cup[A\cap(C\cap\mathscr{C}(B))]$

由分配律，有

$=A\cap[(B\cap\mathscr{C}(C))\cup(C\cap\mathscr{C}(B))]$

由引理，有

$=A\cap(B\triangle C)$。

其次，证明（6）。由引理

$A\triangle B=(A\cap\mathscr{C}(B))\cup(B\cap\mathscr{C}(A))$

由分配律

$=[A\cup(B\cap\mathscr{C}(A))]\cap[\mathscr{C}(B)\cup(B\cap\mathscr{C}(A))]$

再由分配律

$=[(A\cup B)\cap(A\cup\mathscr{C}(A))]\cap[(\mathscr{C}(B)\cup B)\cap(\mathscr{C}(B)\cup\mathscr{C}(A))]$

因$A\cup\mathscr{C}(A)=B\cup\mathscr{C}(B)=S$，$S\cap M=M$，故

$=(A\cup B)\cap(\mathscr{C}(B)\cup\mathscr{C}(A))$

由对偶原理

$=(A\cup B)\cap\mathscr{C}(A\cap B)$

由引理

$=(A\cup B)-(A\cap B)$。

习　　题

1．试证下列诸条件是等价的：

a．$A\cap B=\phi$。

b．$A\subset\mathscr{C}(B)$。

c．$B\subset\mathscr{C}(A)$。

2．试证下列诸条件是等价的：

a．$A\cup B=S$。

b．$\mathscr{C}(A)\subset B$。

c. $\complement(B) \subset A$。

3. 试证下列诸条件是等价的：

a. $A \subset B$。

b. $A \cap B = A$。

c. $A \cup B = B$。

d. $A \cap \complement(B) = \phi$。

e. $\complement(A) \cup B = S$。

f. $A - B = \phi$。

g. $\complement A \supset \complement B$。

4. 试证

$A \setminus B = A \cap \complement(B)$。

5. 试证下列等式成立：

a. $A \cap (B \setminus C) = B \cap (A \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
$= (A \cap B) \setminus (A \cap C)$。

b. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$。

c. $\complement(A - B) = B \cup \complement(A)$。

6. 试证

$A \setminus B = A \setminus (A \cup B) = (A \cup B) \setminus B$。

7. 试证

$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$。

8. 试证

a. $A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap \complement(C))$。

b. $(A \cup C) \cap (B \cup \complement(C)) \subset A \cup B$。

9. 试证

a. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

b. $(A - B) - C = A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$。

c. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$。

d. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$。

10. 试证

a. $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$。

b. $A - B = A \triangle (A \cap B)$。

11．试讨论$p(S)$中关于△运算是否构成群？

12．若$A \triangle B = M \triangle N$是否必有$A \cup N = B \cup M$？

13．二集合A，B，若对于某集合C，满足

$$A \cup C = B \cup C, \quad A \cap C = B \cap C,$$

则A＝B。

14．证明：

$$(X - A) - (X - B) = (X - A) \cap B \subset X - (A - B)。$$

15．证明：$(A \triangle B) \cap \complement A = B \cap \complement A$。

16．证明：$B = \{(A \triangle B) \cap A\} \cup (A \cap B)$。

17．证明：若$A \triangle X = A \triangle Y$ 则 $X = Y$。

§5．集族(family of sets)

构成集合的元素可以是任何事物，像$p(A)$这样由集合构成的集合，在现代数学中也是常遇到的。由集合构成的集合称为**集族**(*family of sets*)，通常用$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$，……等花体字母表示之。为了论述问题的需要，对于集族的元素可赋予标记。有下述定义：

定义 1：设D是一个集合，$\mathfrak{M}$是一个集族，若对于D的任一元素α，在$\mathfrak{M}$中有且仅有一个集合A_α与之对应，而且$\mathfrak{M}$的每个集合都对应D的某个元素。称$\mathfrak{M} = \{A_\alpha\}$为以$D$为其指标集(*index set*)的集族，记作

$$\mathfrak{M} = \{A_\alpha : \alpha \in D\} \text{ 或 } \mathfrak{M} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in D}。$$

例 1：设p为自然数，对于小于p的任一非负整数k，令A_k为以p为模，剩余为k的自然数的集合，即

$$A_k = \{x : x = np + k, \ n\text{为非负整数}\},$$

则$\{A_K\}_{0\leqslant K<P}$是以$\{0, 1, \cdots, p-1\}$为其指标集的集族。

特别的，设A_1为奇数集，A_0为偶数集。则$\{A_1, A_0\}$为集族，它的指标集为$\{1, 0\}$。

例 2：设N为自然数集，对于N的每个元素n，令$A_n=\{x: 0\leqslant x<\frac{1}{n}\}$，则$\{A_n\}_{n\in N}$为以自然数集$N$为其指标集的集族。这个集族实际是一列半开区间

$$\{[0, \frac{1}{n})\}_{n\in N}。$$

以自然数集N为指标集的集族应用较广，常称之为集列(*Sequence of sets*)。

例 3：设D为非负整数集，对于D的每个元素n，A_n为2^n的一切奇数倍的集。即

$A_0=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}=\{2^0$的奇数倍的集$\}$

$A_1=\{2, 6, 10, 14, \cdots\}=\{2^1$的奇数倍的集$\}$

$A_2=\{4, 12, 20, 28, \cdots\}=\{2^2$的奇数倍的集$\}$

$A_3=\{8, 24, 40, 56, \cdots\}=\{2^3$的奇数倍的集$\}$

……………

$A_n=\{2^n, 3\times 2^n, 5\times 2^n, 7\times 2^n, \cdots\}$

……………

则$\{A_n\}$为集族，它的指标集为非负整数集。

例 4：设D为区间$(0, 1]$，对任意$\alpha\in(0, 1]$，令

$$A_\alpha=\{x: |x|<\alpha\}=(-\alpha, \alpha),$$

则$\{A_\alpha\}$是集族，它的指标集为$(0, 1]$。

关于集合的并交运算自然可以推广到集族上。

定义 2：设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是指标集为$D$的集族，集合

$$\{x: 有\alpha\in D, 使x\in A_\alpha\}$$

称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的**并集**(*union*)，记作

$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha \quad \text{或} \quad \bigcup\{A_\alpha:\ \alpha\in D\}。$$

如例 1 中

$$\bigcup_{0\leq\alpha<p} A_\alpha = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{p-1} = N。$$

在例 2 中

$$\bigcup_{\alpha\in N} A_\alpha = \bigcup_{n\in N} [0,\ \frac{1}{n}) = [0,\ 1)。$$

在例 3 中

$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha = N。$$

在例 4 中

$$\bigcup_{\alpha\in(0,1)} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in(0,1)} (-\alpha,\ \alpha) = (-1,\ 1)。$$

定义 3： 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是指标集为$D$的集族，集合

$$\{x:\ \text{对所有}\alpha\in D,\ \text{恒有}x\in A_\alpha\}$$

称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的交集(*intersection*)，记作

$$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha \quad \text{或} \quad \bigcap\{A_\alpha:\ \alpha\in D\}。$$

就上述例子而言，有

例 1： $\bigcap_{0\leq\alpha<p} A_\alpha = \phi$。

例 2： $\bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in N} [0,\ \frac{1}{\alpha}) = \{0\}$。

例 3： $\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha = \phi$。

例 4： $\bigcap_{\alpha\in(0,1)} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in(0,1)} (-\alpha,\ \alpha) = \{0\}$。

定理 1： 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为集族，C为任一集合，则

（1）若对每个$\alpha\in D$，有$A_\alpha\subset C$，则$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha\subset C$。

（2）若对每个$\alpha\in D$，有$A_\alpha\supset C$，则$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha\supset C$。

证明：（1）若$x\in\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha$，则由定义必有指数$\beta\in D$，

使$x\in A_\beta$，由条件$A_\beta\subset C$，故$x\in C$，从而有$\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\subset C$。

（2）若$x\in C$，由条件对每个$\alpha\in D$，有$x\in C\subset A_\alpha$，由定义有$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，故$C\subset\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。

定理 2：设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为集族，$B$为任一集合，则

（1）$B\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(B\cap A_\alpha)$，

（2）$B\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(B\cup A_\alpha)$。

证明：（1）由交的定义有

$x\in B\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\Longleftrightarrow x\in B$且$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。

由定义 2 有

$\Longleftrightarrow x\in B$且有某指数$\beta\in D$，使$x\in A_\beta$，

$\Longleftrightarrow x\in B\cap A_\beta$，对某$\beta\in D$，

$\Longleftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}(B\cap A_\alpha)$，

故

$$B\cap(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in D}(B\cap A_\alpha)。$$

（2）的证明与此类似不再重复。

定理 3：（广义分配律）设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$，$\{B_\beta\}_{\beta\in E}$为集族，则

（1）$(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap(\bigcup\limits_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcup\limits_{\alpha,\beta}(A_\alpha\cap B_\beta)$，

（2）$(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cup(\bigcap\limits_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcap\limits_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cup B_\beta)$。

此处(α,β)经历一切可能的组合。

证明：（1）$x\in(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap(\bigcup\limits_{\beta\in E}B_\beta)$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$ 且 $x\in\bigcup\limits_{\beta\in E}B_\beta$

$\Longleftrightarrow$有$\alpha_0\in D$，$\beta_0\in E$使$x\in A_{\alpha_0}$及$x\in B_{\beta_0}$

$\Longleftrightarrow$ 有$(\alpha_0,\ \beta_0)$使$x\in A_{\alpha_0}\cap B_{\beta_0}$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cap B_\beta)$。

故

$$(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcup_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cap B_\beta)。$$

（2） $x\in(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cup(\bigcap\limits_{\beta\in E}B_\beta)$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$ 或$x\in\bigcap\limits_{\beta\in E}B_\beta$

$\Longleftrightarrow$对所有的$\alpha\in D$，$x\in A_\alpha$ 或对所有 的$\beta\in E$，$x\in B_\beta$

$\Longleftrightarrow$对任一对$(\alpha,\ \beta)$必有$x\in(A_\alpha\cup B_\beta)$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcap\limits_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cup B_\beta)$。

故

$$(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha)\cup(\bigcap_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcap_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cup B_\beta)。$$

定理 4： 对偶原理（$De\ \ Morgan$公式）

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为$p(S)$的元素族，则

(a) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(\mathscr{C}(A_\alpha))$

(b) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(\mathscr{C}(A_\alpha))$

证明： (a) $x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)$

$\Longleftrightarrow x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$

$\Longleftrightarrow$对任一$\alpha\in D$，$x\notin A_\alpha$

$\Longleftrightarrow$对任一$\alpha\in D$，均有$x\in\mathscr{C}(A_\alpha)$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}(\mathscr{C}(A_\alpha))$

故

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in D}(\mathscr{C}(A_\alpha))。$$

(b) $x \in \mathscr{C}(\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha)$

$\Longleftrightarrow x \notin \bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha$

$\Longleftrightarrow$ 有 $\alpha_0 \in D$，$x \notin A_{\alpha_0}$

$\Longleftrightarrow$ 有 $\alpha_0 \in D$，$x \in \mathscr{C} A_{\alpha_0}$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in D} (\mathscr{C}(A_\alpha))$

故

$$\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in D} (\mathscr{C}(A_\alpha))。$$

对偶原理即并的补集等于补集的交，交的补集等于补集的并。这个结果较重要。

定理 5 （广义结合律）：设 $\{A_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in D,\ \beta \in E_\alpha}$ 是集族，则

（1）$\bigcup_{(\alpha,\beta)} A_{\alpha\beta} = \bigcup_{\alpha} (\bigcup_{\beta} A_{\alpha\beta})$，

（2）$\bigcap_{(\alpha,\beta)} A_{\alpha\beta} = \bigcap_{\alpha} (\bigcap_{\beta} A_{\alpha\beta})$。

证明：$x \in \bigcup_{(\alpha,\beta)} A_{\alpha\beta}$

$\Longleftrightarrow$ 有 $\alpha_0 \in D$，$\beta_0 \in E_{\alpha_0}$ 使 $x \in A_{\alpha_0\beta_0}$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\beta \in E_{\alpha_0}} A_{\alpha_0\beta}$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha} (\bigcup_{\beta} A_{\alpha\beta})$。

故

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)} A_{\alpha\beta} = \bigcup_{\alpha} (\bigcup_{\beta} A_{\alpha\beta})。$$

同理可证明（2）。

习　　题

1．求 $\bigcup_{n \in N} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$；　$\bigcap_{n \in N} \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$。

2．证明

$$\{x:\ x>0\}=\bigcup_{n\in N}\{x:\ x>\frac{1}{n}\}。$$

3．在实数集中，令

$$A_x=[0,\ x)$$

求 $\bigcap_{x>1} A_x$。

4．在实数集中，令

$$A_n=(n,\ \infty)\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\cdots)$$

求 $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ 及 $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} A_n$。

5．试证

$$\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap B_\alpha)\supset(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap(\bigcap_{\alpha\in D}B_\alpha)。$$

6．设$f(x)$是点集E上的实值函数，则

$$\{x:\ f(x)=a\}=\bigcap_{n\in N}\{x:\ a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\}。$$

7．设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为集族，$C$为任意集。试证

(a) $C-(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in D}(C-A_\alpha)$，

(b) $C-(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in D}(C-A_\alpha)$。

8．设$\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$是有限族。对于自然数集$N$的区间$[1,\ n]$的任意子集$H$，令

$$P_H=\bigcup_{i\in H}A_i\quad 及\quad Q_H=\bigcap_{i\in H}A_i。$$

令T_K是$[1,\ n]$中取K个元素的所有子集的族。试证

$$\bigcup_{H\in T_K}Q_H\supset\bigcap_{H\in T_K}P_H\qquad(2K\leqslant n+1),$$

$$\bigcup_{H\in T_K}Q_H\subset\bigcap_{H\in T_K}P_H\qquad(2K\geqslant n+1)。$$

9．设$\{A_n\}_{n\in N}$是集列，作$B_1=A_1$，$B_n=A_n-(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i)$，$(n>1)$，求证$\{B_n\}$是一列互不相交的集，而且

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i,\quad n=1,\ 2,\cdots\cdots。$$

§ 6. 直并(direct union)与直积(direct product)

定义 1：设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为集族，若对于任意$\alpha\in D, \alpha'\in D, \alpha'\neq\alpha$，恒有$A_\alpha\cap A_{\alpha'}=\phi$时，称集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为**互质的**(*disjoint*)**或两两不相交的**。而$A=\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$称为$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的**直并**(*direct union*)，记作$A=\sum_{\alpha\in D}A_\alpha$，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$称为$A$**的直并分解**(*direct union decomposition*)，而各A_α ($\alpha\in D$) 称为A**的直并因子**(*direct union factor*)。

例 1：设$A_n=[n-1, n)$，则$\{A_n\}_{n\in N}$为互质的，且有$[0, \infty)=\sum_{n\in N}A_n$为$\{A_n\}_{n\in N}$的直并，$\{A_n\}_{n\in N}$为$[0, \infty)$的直并分解。这就是将正实数分解为各半开区间$[n-1, n)$的直并。

例 2：设$A_K=\{x: x=pn+k, n=0, 1, 2, \cdots\cdots\}$，($K=0, 1\cdots\cdots, p-1$)。则$\{A_K\}_{0\leq K<p}$为互质的，且$N=\sum_{K=0}^{p-1}A_k$，$\{A_K\}_{0\leq k<p}$为自然数集的直并分解。这就是将自然数用$p$分的剩余类的直并。

例 3：设$A_n=\{n\}$，则$N=\bigcup_{n\in N}A_n$为直并。

由定义直接推得

定理 1：若$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$为$A$的直并分解，而$\{A_{\alpha\beta}\}_{\beta\in D_\alpha}$为$A_\alpha$的直并分解，则$\{A_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in D, \beta\in D_\alpha}$为$A$的直并分解。

即若$A=\sum_{\alpha\in D}A_\alpha$，$A_\alpha=\sum_{\beta\in D_\alpha}A_{\alpha\beta}$，则$A=\sum_{\alpha\in D}\sum_{\beta\in D_\alpha}A_{\alpha\beta}$。

证明：因$A=\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$，$A_\alpha=\bigcup_{\beta\in D_\alpha}A_{\alpha\beta}$，故$A=\bigcup_{\alpha\in D}\bigcup_{\beta\in D_\alpha}A_{\alpha\beta}$。下面证明此并为直并，只须证明若$\alpha\beta\neq\alpha_1\beta_1$，则$A_{\alpha\beta}\cap A_{\alpha_1\beta_1}=\phi$。

实际上，若$\alpha\neq\alpha_1$，则$A_{\alpha\beta}\subset A_\alpha$，$A_{\alpha_1\beta_1}\subset A_{\alpha_1}$，因$\{A_\alpha\}$为$A$的直并分解，故$A_\alpha\cap A_{\alpha_1}=\phi$，从而$A_{\alpha\beta}\cap A_{\alpha_1\beta_1}=\phi$。若$\alpha=\alpha_1$，则必有$\beta\neq\beta_1$，而$A_{\alpha\beta}\subset A_\alpha$，$A_{\alpha_1\beta_1}\subset A_\alpha$，因$\{A_{\alpha\beta}\}$是$A_\alpha$的直并分解，故$A_{\alpha\beta}\cap A_{\alpha_1\beta_1}=\phi$。

综上，$\{A_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in D,\ \beta\in D_\alpha}$为$A$的直并分解。

定义 2：任意两个对象a，b确定一个新对象$c=(a,\ b)$称为序对（*ordered pair*）。当且仅当$a=a'$，$b=b'$时称二序对$(a,\ b)$，$(a'b')$ 相等（*equal*）。

定义 3：$c=(a,\ b)$ 的第一个元素a称为c的**第一坐标**（*first coordinate*），第二个元素b称为c的**第二坐标**（*second coordinate*）。

定义 4：设A，B为任意二集，所有序对的集$\{(a,b)\}=\{(a,\ b):\ a\in A,\ b\in B\}$写做$A\times B$，称为集$A$与集$B$的**直积**（*direct product*）。

例 1：平面点集为二实直线的直积$R\times R$。即在平面上确定坐标系后，平面上的点恒可表示为$(a,\ b)$的形式，a为第一坐标，b为第二坐标。

例 2：对每个实数a，令

$$A_a=\{(a,\ b):\ b\in R\}$$

则

$$R \times R = \sum_{a \in R} A_a。$$

实际上，$R \times R$ 为平面，A_a 为横坐标是 a 的直线。当 $a \neq b$ 时，显然 $A_a \cap A_b = \phi$，而 $\sum_{a \in R} A_a$ 为直并，此直并恰为平面 $R \times R$。

例 3：设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$，则 $A \times B = \{(a, \alpha), (a, \beta), (a, \gamma), (a, \delta), (b, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (b, \delta), (c, \alpha), (c, \beta), (c, \gamma), (c, \delta)\}$。

由定义直接推出下列定理成立。

定理 2：（1）$A \times B = \phi \Longleftrightarrow A = \phi$ 或 $B = \phi$。

（2）若 $A \times B \neq \phi$，则 $A' \times B' \subset A \times B \Longleftrightarrow A' \subset A$ 且 $B' \subset B$。

定理 3：关于并、交、差等运算有下列关系：

（1）$(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$，

（2）$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$，

（3）$(A \times C) - (B \times C) = (A - B) \times C$。

证明：由定理 2 之（2），因 $A \subset (A \cup A')$，故

$$(A \times B) \subset (A \cup A') \times B。$$

同理，因 $A' \subset (A \cup A')$，有

$$(A' \times B) \subset (A \cup A') \times B,$$

故

$$(A \times B) \cup (A' \times B) \subset (A \cup A') \times B。$$

反之，若 $(x, y) \in (A \cup A') \times B$，则 $x \in A \cup A'$，$y \in B$。即 $x \in A$ 或 $x \in A'$ 且 $y \in B$。亦即 $x \in A$ 且 $y \in B$ 或 $x \in A'$ 且 $y \in B$，故

$$(x, y) \in (A \times B) \cup (A' \times B)。$$

而

$$(A \cup A') \times B \subset (A \times B) \cup (A' \times B),$$

因此，有

$$(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B。$$

（2）及（3）的证明留给读者练习证之。

要注意，未必有

$$(A \times B) \cup (A' \times B') = (A \cup A') \times (B \cup B'),$$

例如 $A = \{a\}$，　$A' = \{a'\}$，

$B = \{b\}$，　$B' = \{b'\}$，

则 $A \times B = \{(a,\ b)\}$

$A' \times B' = \{(a',\ b')\}$

$$(A \times B) \cup (A' \times B') = \{(a, b), (a', b')\}$$

而

$$A \cup A' = \{a,\ a'\}$$

$$B \cup B' = \{b,\ b'\}$$

$$(A \cup A') \times (B \cup B') = \{(a, b), (a, b'), (a', b), (a', b')\}$$

故

$$(A \times B) \cup (A' \times B') \neq (A \cup A') \times (B \cup B')。$$

定理 4：若$\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$是$A$的直并分解，$\{B_\beta\}_{\beta \in E}$是$B$的直并分解，则$\{A_\alpha \times B_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in D \times E}$是$A \times B$的直并分解。

证明：由定理 3 之（2），因$A_\alpha \subset A$，$B_\beta \subset B$，有

$$A_\alpha \times B_\beta \subset A \times B$$

当$(\alpha,\ \beta) \neq (\alpha_1,\ \beta_1)$ 时，必有

$$A_\alpha \cap A_{\alpha_1} = \phi \text{或} B_\beta \cap B_{\beta_1} = \phi,$$

由定理 3 之（2）又有

$$(A_\alpha \times B_\beta) \cap (A_{\alpha_1} \times B_{\beta_1}) = (A_\alpha \cap A_{\alpha_1}) \times (B_\beta \cap B_{\beta_1})。$$

由定理 2 之(1)，知它是空集，故$\{A_\alpha\times B_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in D\times E}$是互质的集族。

根据定理 3 之(1)，有

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in D\times E}(A_\alpha\times B_\beta)=\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\times\bigcup_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\times B)$$
$$=(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)\times B=A\times B,$$

故$\{A_\alpha\times B_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in D\times E}$是$A\times B$的直并分解。

关于直积的概念容易推广到有限个集的直积上。

定义 5：设$A_1,\cdots\cdots,A_n$为集，任取$a_i\in A_i$，$i=1,2,\cdots,n$。做元素$(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$，则$\{(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n):a_i\in A_i,i=1,2,\cdots\cdots,n\}$称为$A_1$、$A_2$，……，$A_n$的直积，记作

$$A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_n。$$

例如n维*Euclid*空间就是n个实直线的直积。

习　　题

1．设$A_1\subset A$，$B_1\subset B$，求证下述等式成立：

$$A\times B\setminus A_1\times B_1=(A\setminus A_1)\times B\cup(A_1\times B\setminus B_1)$$
$$=(A\setminus A_1\times B_1)\cup(A\times B\setminus B_1)$$
$$=(A_1\times B\setminus B_1)\cup(A\setminus A_1\times B_1)\cup(A\setminus A_1\times B\setminus B_1)。$$

2．证明：

$$(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\subset(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)。$$

3．设$A_1=[3,5]$，$B_1=[4,7]$，$A_2=[2,4]$，$B_2=[5,8]$，试求出

(a) $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)$，

(b) $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$。

§ 7. 集列的极限(limit of set sequence)

设$\{A_n\}_{n\in N}$为集列，由集列可作出二新集：

$A=\{x$: 有无限多个n，使$x\in A_n\}$，

$B=\{x$: 除有限个n外，都有$x\in A_n\}$。

B的元素亦称为属于几乎所有的An。

定义 1：A称为集列$\{A_n\}_{n\in N}$的**上极限集**（*superior limit set*），记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n。$$

B称为集列$\{A_n\}_{n\in N}$的**下极限集**（*inferior limit set*），记作

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n。$$

当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$时，称之为集列$\{A_n\}$的**极限集**（*limit set*），而集列$\{A_n\}$称为**收敛的**（*convergent*）。

例 1：在集列$\{A_n\}$中，设

$$A_{2k}=M\quad(k=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

$$A_{2k-1}=N\quad(k=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=M\cup N,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=M\cap N。$$

例 2：集列$\{A_n\}_{n\in N}$中，若$A_n=[0,\ n]$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0,\infty)。$$

例 3：设

$$A_1=[0,\ 1],\quad A_2=\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\ A_3=\left[\frac{1}{2},\ 1\right],$$

$$A_4=\left[0,\ \frac{1}{3}\right],\quad A_5=\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right],\ A_6=\left[\frac{2}{3},\ 1\right],$$

$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,\ 1],\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \phi。$$

例 4：设$\{A_n\}_{n\in N}$为如下的区间列：

$$A_{2n-1} = \left[0,\ 2 - \frac{1}{2n-1}\right],\quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

$$A_{2n} = \left[0,\ 1 + \frac{1}{2n}\right],\quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

因区间[0，1]的点属于所有的$A_n(n\in N)$，而对于区间(1, 2)的任何点x，必存在$n_0(x)$，当$n>n_0(x)$时，有

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n-1}$$

即$x \notin A_{2n}$而$x\in A_{2n-1}$，$n = n_0+1,\ n_0+2, \cdots\cdots$。换言之，对区间(1，2)的点$x$，具有充分大的奇数指标的集都含有$x$，即$\{A_n\}$中有无限多个集含有$x$；而充分大的偶数指标的集都不含有$x$，即$\{A_n\}$中有无限多个集不含有$x$。因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,\ 2),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0, 1]。$$

例 5：设$A_n = [0,\ 1 + \frac{1}{n}]$，$n\in N$，则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,\ 1]。$$

定理 1：关于上、下极限集有下列关系：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \supset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{K=n}^{\infty} A_K$，

(3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{K=n}^{\infty} A_K$。

证明：由定义直接推出（1）成立。

任取 $x\in \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$，按定义有无限多个$A_n$含有$x$，设为

$$A_{n_1},\ A_{n_2},\ \cdots\cdots,\ A_{n_K},\ \cdots\cdots$$

含有x，其中$n_1<n_2<\cdots\cdots<n_K<\cdots\cdots$。则对任意自然数$m$，有$n_r>m$，使$x\in A_{n_r}\subset \bigcup_{K=m}^{\infty} A_K$，故

$$x\in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{K=m}^{\infty} A_K。$$

反之，若$x\in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{K=m}^{\infty} A_K$，则对每个$n$，均有

$$x\in \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K。$$

即有$n_K\geqslant n$，$x\in A_{n_K}$。故x必在无限多个A_n中。

即

$$x\in \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n。$$

故

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K。$$

于是证得（2）。

（3）的证明与此完全类似，留给读者做为练习证之。

定理 2：设$\{A_n\}_{n\in N}$为集列，B为任一集，则

(1) $B-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(B-A_n)$,

(2) $B-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(B-A_n)$。

证明：由定理1，有

$$B-\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=B-\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{K=n}^{\infty}A_K$$

由对偶原理的一般形式，有

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(B-\bigcup_{K=n}^{\infty}A_K\right)$$

同理有

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{K=n}^{\infty}(B-A_K)$$

由定理有

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}}(B-A_n)$$

故（1）成立。

同理可证得（2）。

定理 3：设$S=\bigcup\limits_{n\in N}A_n$，令$B_n=\complement_S A_n$，则有

$$S=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\cup\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\cup\underline{\lim_{n\to\infty}}B_n。$$

证明：若$x\in S$，则x或者属于几乎所有的A_n，或者有无限多个A_n不含x，

当x属于几乎所有的A_n时，有$x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，

当x不属于无限多个A_n时，则x必属于无限多个B_n，亦即$x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$，

故

$$S\subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \cup \varlimsup_{n\to\infty} B_n。$$

反之，由S的意义，有

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n\subset S,\qquad \varlimsup_{n\to\infty} B_n\subset S,$$

故

$$S\supset \varliminf_{n\to\infty} A_n \cup \varlimsup_{n\to\infty} B_n。$$

总之，有

$$S= \varliminf_{n\to\infty} A_n \cup \varlimsup_{n\to\infty} A_n。$$

同法可证另一等式。

定义 2： 若集列$\{A_n\}_{n\in N}$满足

$$A_n\subset A_{n+1}\,(A_n\supset A_{n+1}),\quad n=1,\ 2,\cdots\cdots$$

则称$\{A_n\}_{n\in N}$为**单调增加（减少）的集列，统称为单调集列**（*monotone sequences of sets*）。

从极限的定义容易证明单调集列一定是收敛的。若集列$\{A_n\}_{n\in N}$是单调增加集列，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n。$$

若集列$\{A_n\}_{n\in N}$是单调减少集列，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n。$$

若集列$\{A_n\}_{n\in N}$是任意集列，引入集

$$G_n=\bigcup_{K=n}^{\infty} A_K,\qquad F_n=\bigcap_{K=n}^{\infty} A_K,$$

则

$$G_n \supset G_{n+1}, \quad F_n \subset F_{n+1}, \quad n=1, 2, \cdots\cdots。$$

换句话说，$\{G_n\}$ 是单调减少集列，而 $\{F_n\}$ 是单调增加集列。

根据单调集列的极限形式及定理 1 直接推得

推论：任一集列$\{A_n\}_{n\in N}$的上、下极限，可以化为单调减少、单调增加集列的极限，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} G_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} F_n。$$

实际上，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} G_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{K=n}^{\infty} A_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} F_n。$$

习　　题

1．设 $A_{2n}=\left[0, \frac{1}{2n}\right]$，$A_{2n-1}=[0, 2n+1]$，求集列$\{A_n\}_{n\in N}$的上极限及下极限。

2．设$\{A_n\}_{n\in N}$，$\{B_n\}_{n\in N}$分别为集列，求证：

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \underline{\lim_{n\to\infty}} B_n \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cup B_n)$

$\subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \underline{\lim_{n\to\infty}} B_n\right)$

$\subset \overline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cup B_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n。$

(2) $\varliminf_{n\to\infty} A_n \cap \varliminf_{n\to\infty} B_n = \varliminf_{n\to\infty} (A_n \cap B_n)$

$\subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \cap \varlimsup_{n\to\infty} B_n \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n \cap \varliminf_{n\to\infty} B_n \right)$

$\subset \varlimsup_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \cap \varlimsup_{n\to\infty} B_n$。

3. 试证：

(a) $\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \setminus B_n) \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \setminus \varliminf_{n\to\infty} B_n$，

(b) $\varliminf_{n\to\infty} (A_n \setminus B_n) = \varliminf_{n\to\infty} A_n \setminus \varlimsup_{n\to\infty} B_n$。

4. 若集列$\{A_n\}_{n\in N}$收敛，则其任一子列亦收敛，且收敛于同一极限。

第二章　关系与映射(relation and mapping)

§ 1. 二元关系(binary relation)

我们在数学学习中已经熟悉了一些关系，如直线的平行关系、垂直关系，实数的相等关系、大小关系，集合的包含关系、互补关系、互斥关系，点和集合的属于关系以及对应关系、函数关系……，数学的许多对象可以用集合和关系的语言予以简捷的描述。这种观点已成为现代数学的基本观点，表现了数学抽象性的特征。表面看起来似乎无关的内容，但本质上却有其共性，可以统一的数学语言予以刻划。

定义 1：设A，B为集，R为A与B间的关系，若$a\in A$和$b\in B$有这个关系，则说a和b有R关系，写做$(a,b)\in R$，或aRb。否则若a和b没有R关系，则写作$(a, b)\notin R$，或$a\not R b$。

可见R是序对的集合，它是$A\times B$的子集。

定义 2：$A\times B$的子集R称为关系R的图象(*graph*)。

关系一定可以用它的图象表达出来，图象是关系的具体表现形式。以后我们对关系和它的图象将不加区别。关系就是序对的集。

特别的，当$A=B=S$时，简称之为集S的关系。它意味着S的元素间的关系。

例 1：实数间的小于或等于关系是实数集D的关系，常

用“$\leqslant$”表示。a小于或等于b写做$a\leqslant b$或$(a, b)\in$“$\leqslant$”。显然，当a大于b时，$(a, b)\notin$“$\leqslant$”，或$a\nleqslant b$。小于或等于关系可以表示为

$$\{(a, b): a\leqslant b, a\in D, b\in D\}。$$

例 2：设A为平面点集，B为平面上的直线集，点在直线上是平面图形的关系。设$a\in A$，$b\in B$，(a, b)属于这个关系意味着点a在直线b上。若点a不在直线b上，则说(a, b)不属于这个关系。

例 3：设S为集，A表示S的子集，a表示S的元素。属于关系是集合S与其子集的集合$p(S)$间的一个关系，常写作“$\in$”。若元素a是集合A的元素，则说(a, A)有关系“$\in$”或$a\in A$；若元素a不是集合A的元素，则说(a, A)没有关系“$\in$”或$a\notin A$。属于关系可以表示为

$$\{(a, A): a\in A, A\subset S\}。$$

例 4：集合S的子集A，B间的包含关系“$\subset$”是S的幂集$p(S)$的关系。当且仅当A被B包含时$(A, B)\in$“$\subset$”或$A\subset B$。包含关系可以表示为

$$\{(A, B): A\subset B, A\in p(S), B\in p(S)\}。$$

例 5：在整数集中，$a-b$为偶数是整数集的关系，这个关系通常用$a\equiv b(mod\ 2)$表示。显然奇数对或偶数对都属于这个关系，而一个奇数和一个偶数的数对不属于此关系。

例 6：a是b的约数也是整数集的一个关系，常用$a|b$表示这个关系。整数序对中第一个整数是第二个整数的约数时属于这个关系，否则不属于。如(2, 4)，(3, 6)，(5, 35)等属于这个关系，而(2, 3)不属于。这个关系常写作

$$\{(a, b): a|b, a, b\text{ 是整数}\}$$

例 7：在直线集中直线a与直线b平行及垂直都是平面图

形的关系。通常记作$a /\!/ b$及$a \perp b$。平行关系可表示为

$$\{(a,\ b):\ a /\!/ b,\ a,\ b\text{为直线}\},$$

垂直关系可表示为

$$\{(a,\ b):\ a \perp b,\ a,\ b\text{为直线}\}。$$

例 8：在三角形集中，三角形a与三角形b相似（或全等）也是平面图形的关系，通常记作$a \sim b$（或$a \cong b$）。

例 9：集合

$$\triangle(S) = \{(x,\ x):\ x \in S\}$$

称为集合S的**恒等关系**（*identity relation*），也称为$S \times S$的**对角线**（*diagonal*）。

例10：集合

$$\{(x,\ y):\ y = x^3\}$$

是立方关系。

定义 2：关系R的第一坐标的全体，即

$$\{x:\ \text{对某个}y,\ (x,\ y) \in R\}$$

称为关系R的**定义域**（*domain*），记作D_R或$domR$。它的第二坐标的全体，即

$$\{y:\ \text{对某个}x,\ (x,\ y) \in R\}$$

称为关系R的**值域**（*range*），记作E_R或$ranR$。如上述诸例中：

1. $D_R = E_R =$实数集，
2. $D_R =$平面点集，$E_R =$直线集，
3. $D_R = S$，$E_R = p(S) \setminus \{\phi\}$，
4. $D_R = E_R = p(S)$，
5. $D_R = E_R =$整数集，
6. $D_R = E_R =$整数集，
7. $D_R = E_R =$直线集，

8. $D_R = E_R =$ 三角形集.

9. $D_R = E_R = S$.

10. $D_R = E_R =$ 实数集。

定义 3：当且仅当a与b有R关系时，称b与a有R^{-1}关系，R^{-1}称为R的**逆关系** (*inverse relation*)。

例 1：倍数关系是约数关系的逆关系。

例 2：直线含有点是点在直线上的逆关系。

例 3：“$\subset$”关系是“$\supset$”关系的逆关系。

由定义直接看出关系R与其逆关系R^{-1}是相互唯一确定的，R的定义域是R^{-1}的值域，而R的值域是R^{-1}的定义域。即

$$(a, b) \in R \Longleftrightarrow (b, a) \in R^{-1}。$$

由逆关系的定义也可直接推得

$$(R^{-1})^{-1} = R。$$

定义 4：设R_1、R_2为关系，则

$$\{(a, b): 对某个c, 有aR_1c、cR_2b\}$$

称为R_1关系与R_2关系的**复合** (*composition*)，记作

$$R_2 \circ R_1。$$

例如，$R_1 = \{(1, 2)\}$，$R_2 = \{(2, 3)\}$，则 $R_2 \circ R_1 = \{(1, 3)\}$。

$$\triangle \circ \triangle = \triangle,$$

$$\leqslant \circ \leqslant = \leqslant,$$

$$\subset \circ \subset = \subset。$$

容易看出关系的复合是不可交换的，即一般的$R_1 \circ R_2$与$R_2 \circ R_1$不一定相等。如上例中$R_2 \circ R_1 = \{(1, 3)\}$，而$R_1 \circ R_2 = \phi$。

也容易看出恒等关系在关系的复合中起着特殊的作用，

对于任意关系R，恒有

$$\triangle \circ R = R \circ \triangle = R。$$

关于复合关系的定义域和值域有

$$D_{R_1 \circ R_2} \subset D_{R_2},$$

$$E_{R_1 \circ R_2} \subset E_{R_1}。$$

定理 1：设R_1，R_2是集S的关系，则

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}。$$

证明：由定义可看出

$(a,b) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Longleftrightarrow (b, a) \in R_1 \circ R_2$

$\Longleftrightarrow$ 有某个c，使$(b, c) \in R_2$，$(c, a) \in R_1$

$\Longleftrightarrow$ 有某个c，使$(c,b) \in R_2^{-1}$，$(a, c) \in R_1^{-1}$

$\Longleftrightarrow (a, b) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$。

定理2：设R_1, R_2, R_3是集S的关系，则结合律成立。即

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3。$$

证明：$(a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \Longleftrightarrow$ 有c，使$(c, d) \in R_1$，$(a, c) \in R_2 \circ R_3$

$\Longleftrightarrow$ 有c，使$(c, d) \in R_1$，有b使$(b, c) \in R_2$，$(a, b) \in R_3$

$\Longleftrightarrow$ 有b使$(a, b) \in R_3$，及c，使$(b, c) \in R_2$，$(c, d) \in R_1$

$\Longleftrightarrow$ 有b，使$(b, d) \in R_1 \circ R_2$，$(a, b) \in R_3$，

$\Longleftrightarrow (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$。

故结合律成立。

定义 5：若$A \subset D_R$，令

$$R[A] = \{b: aRb, \text{对某个} a \in A, b \in E_R\}$$

称为关系R在A的象（*image*）。特别的，当$A = \{a\}$时，

$R[\{a\}]$简写为$R[a]$，称为关系R在a的纤维(*fibre*)。

例 1：$\triangle[A]=A$，

例 2：$\in[A]=\{B: B\cap A\neq\phi\}$，

例 3：$\supset[A]=\{B: B\subset A\}=2^A$，

例 4：若A为正实数集，则

$\leqslant[A]=A$。

由定义直接推得

定理3：（1）若$D_R=A$，则$E_R=R[A]$。

（2）若$A_1\subset A_2$，则$R[A_1]\subset R[A_2]$，

（3）若$R_1\subset R_2$，则$R_1[A]\subset R_2[A]$，

（4）R在x的纤维不空$\Longleftrightarrow x\in D_R$。

定义 6：若$B\subset E_R$，令

$$R^{-1}[B]=\{a: aRb，对某个b\in B，a\in D_R\}，$$

称为关系R在B的原象(*inverse image*)。特别的，当$B=\{b\}$时，$R^{-1}[\{b\}]$简写为$R^{-1}[b]$称为关系R在b点的反纤维(*inverse fibre*)。

例如 $\in^{-1}[B]=\{a: a\in B\}=B$，

$\triangle^{-1}[B]=B$。

定理 4：设A，B为集合S的子集，R为S的关系，则

$$R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]。$$

证明：由定理3之（2）有

$R[A]\subset R[A\cup B]$，

$R[B]\subset R[A\cup B]$，

故

$$R[A]\cup R[B]\subset R[A\cup B]。$$

反之，若$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$。

当$x\in A$时，$R[x]\subset R[A]$。当$x\in B$时，$R[x]\subset R[B]$。

故对任何$x \in A \cup B$，必有$R[x] \subset R[A] \cup R[B]$。

故

$$R[A \cup B] \subset R[A] \cup R[B],$$

于是

$$R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]。$$

定理5：设A，B为集合S的子集，R为S的关系，则

$$R[A \cap B] \subset R[A] \cap R[B]。$$

证明：由定理 3 之（2）有

$$R[A \cap B] \subset R[A],$$

$$R[A \cap B] \subset R[B],$$

故

$$R[A \cap B] \subset R[A] \cap R[B]。$$

注意，这只是包含关系，等式未必成立。

例如，若$R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$，$A = \{a, b\}$，$B = \{b, c\}$，则

$$R[A \cap B] = R[b] = \{c\},$$

$$R[A] = \{b, c\},$$

$$R[B] = \{b, c\},$$

$$R[A] \cap R[B] = \{b, c\}。$$

而

$$R[A \cap B] \neq R[A] \cap R[B]。$$

定理 6：设A为集合S的子集，R，R'为集合S的关系，则

$$(R \circ R')[A] = R[R'[A]]。$$

这个证明留给读者练习证之。

习　　题

1. 试说明下列各关系的意义：

　(a) $R=A\times A$,

　(b) $R=\phi$,

　(c) $R=A\times A\setminus\triangle$,

　(d) $R=\{(x,\ y):x\in y\subset S\}$,

　(e) $R=\{(x,\ y):\ x\cup y=S,\ x\cap y=\phi\}$。

2. 试确定下列各集：

　(a) $\supset^{-1}[B]$

　(b) [illegible]$^{-1}[B]$

3. 试证

　$(R_1\circ R_2)[A]=R_1[R_2[A]]$。

§ 2. 等价关系(equivalence relation)

设S为集合，R为S的关系，有

定义 1：若对于任意$a\in S$，恒有aRa时，称R为自反的(*reflexive*)。

对任意a，$b\in S$，当且仅当aRb时有bRa，称R为对称的（*symmetric*)。

若aRb且bRa则$a=b$时，称R为反对称的(*anti-symmetric*)。

若aRb则$b\not R a$时，称R为非对称的（*asymmetric*)。

若aRb且bRc则aRc时，称R为可迁的（*transitive*)。

由定义立即推得这些概念的等价描述：

定理 1：(a) R是自反的$\Longleftrightarrow R\supset\triangle$,

(*b*) R是对称的$\Longleftrightarrow R=R^{-1}$,

(*c*) R是反对称的$\Longleftrightarrow R\cap R^{-1}=\triangle$,

(*d*) R是非对称的$\Longleftrightarrow R\cap R^{-1}=\phi$,

(*e*) R是可迁的$\Longleftrightarrow R\circ R\subset R$。

例 1: 集间包含关系是自反的，可迁的，反对称的但不是对称的。

例 2: 实数的不等关系不是自反的，可迁的，但是对称的。

例 3: 实数的小于关系是可迁的，但不是自反的，对称的。

例 4: 三角形的相似关系是自反的，对称的，可迁的但不是非对称的，反对称的。

例 5: 直线的垂直关系是对称的，但不是自反的，可迁的。

例 6: 立方关系不是自反的，对称的，可迁的，反对称的而是非对称的。

定义 2: 若关系R满足

(1) 自反的

(2) 对称的

(3) 可迁的

则称R为**等价关系** (*equivalence relation*),通常用～表示之。

例如，恒等关系是等价关系， $R=A\times A$是等价关系。图形的合同、相似、全等，直线的平行，整数的同余等都是等价关系。而直线的垂直，数的小于关系、约数关系，点集的包含关系都不是等价关系。

等价关系是一个集合的元素之间的关系，二不同集合之

间的关系不能是等价关系。如点在直线上的关系、元素属于集合的属于关系等都谈不上等价关系。

定义 3：设R为集合S的等价关系，令

$$R[a]=\{b:\ b\in S,\ aRb\}$$

称为由a确定的**R 等价类**（*equivalence class*），通常记作$[a]_R$。

定理 2：设R为集合S的等价关系，若aRb，则$[b]_R=[a]_R$。

证明：若$c\in[a]_R$，则aRc。因aRb，故由可迁性和对称性推得bRc，即$c\in[b]_R$。故

$$[a]_R\subset[b]_R,$$

反之，同理，若$c\in[b]_R$，则$c\in[a]_R$，即

$$[b]_R\subset[a]_R.$$

故

$$[b]_R=[a]_R。$$

这个定理表明，由元素确定的等价类与元素的选取无关，它是由等价关系完全确定的。

定理 3：设R为集合S的等价关系，则S是R等价类的直并。R等价类构成S的直并分解，且分解是唯一的。

证明：首先指出S的每个元素a必属于某一类中。实际上，因aRa，故$a\in[a]_R$。

其次指出，每个元素只能属于一个R等价类。实际上，若$c\in[a]_R$，且$c\in[b]_R$，则由cRa，cRb得出aRb，由定理 2 知$[a]_R=[b]_R$。

故S是R等价类的直并，而R等价类构成S的直并分解，且分解是唯一的。

定理 4：设$\{A_\alpha\}$为集合S的直并分解，则$\{A_\alpha\}$决定S的

一个等价关系。

证明：应用所给的分解导入一个等价关系，当且仅当a，b属于同一A_a时，规定aRb。于是在S上确定关系R，今证明R是等价关系。

（1）自反性。a和a当然在同一A_a中。

（2）对称性。若a和b在同一A_a中，当然b和a也在同一A_a中。

（3）可迁性。若a和b在同一A_a中，b和c也在同一A_a中，则a和c也必在同一A_a中。否则与直并分解矛盾。

例：在自然数集N中，规定关系为以7除余数相同者为同一类。即当且仅当$7 | x-y$时有xRy，则可确定等价类$[0]_7$，$[1]_7$，$[2]_7$，$[3]_7$，$[4]_7$，$[5]_7$，$[6]_7$。且

$$N=[0]_7+[1]_7+[2]_7+[3]_7+[4]_7+[5]_7+[6]_7。$$

定理 5：关系R是集合S的等价关系的要充条件是存在直并分解$\mathfrak{M}$，使

$$R=\bigcup_{A\in\mathfrak{M}}(A\times A)。$$

证明：由定理3知R等价类构成S的直并分解$\mathfrak{M}$。这里指出若A为R等价类，则$A\times A\subset R$。

实际上，若$x, y\in A$，则xRy，即$(x, y)\in R$。因x, y是A的任意元素，故$A\times A\subset R$。

若A，$B\in\mathfrak{M}$，而$A\neq B$，则$A\times B\cap R=\phi$，故

$$R=\bigcup_{A\in\mathfrak{M}}(A\times A)。$$

反之，若$R=\bigcup_{A\in\mathfrak{M}}(A\times A)$，则$\mathfrak{M}$为$S$的子集族，若$(x, y)\in R$，则必有$A\in\mathfrak{M}$，使$(x, y)\in A\times A$，即$x$，$y$在同一集$A$中。故$\mathfrak{M}$是$S$的直并分解，由定理4，$R$是$S$的等价关系。

定义 4：集合S由R等价类构成的集族$\mathfrak{M}$常记作$S/\sim$或S/R，称为S关于R的商集(*quotient set*)。

要注意商集不是S的子集，而是S的子集的集。这些子集之间不相交。

用等价关系进行分类的方法在现代数学中是常见的。

习　　题

1．试证可迁关系的逆关系也是可迁关系。

2．设R为整数集的关系，它是当且仅当$-5\backslash x-y$时有xRy，指出R为等价关系，并写出等价类。

3．对所有自然数对的集$\{(m,n):m,n\in N\}$中，当且仅当$m+n'=m'+n$时有$(m,n)R(m',n')$，则此关系是等价关系。

4．在所有整数对的集$\{(m,n):m,n\in Z$（整数集）$n\neq 0\}$中，当且仅当$mn'=m'n$时，规定关系$(m,n)R(m',n')$，则此关系也是等价关系。

5．在实数集中，当且仅当$x-y$被2π整除时，规定$x\sim y$，则$\sim$是等价关系。

6．集合S的关系R满足对称性及可迁性，那么R是否必是等价关系？下述推理有什么错误？

若aRb　则bRa　（对称性），

若aRb，bRa，则aRa（可迁性），

故对于任一a恒有aRa（即自反性成立）。故R是等价关系。

7．设R为集合S的关系，则恰存在一个等价关系R^*，使$R\subset R^*$，且若$R\subset R'$，R'为等价关系。则$R^*\subset R'$。即含有关系R的最小等价关系R^*是唯一存在的。

§ 3．序关系(ordering relation)

从数的大小、集合的包含等关系中自然可以抽象出序的

概念。

定义 1：集合S满足可迁性的二元关系称为序关系（*ordering relation*）或偏序关系（*partial ordering*）或拟序关系（*quasi ordering*），通常记作“$<$”。

集合S的元素间建立序关系$<$时，称S为有序集（*ordered set*）或半序集（*semi—ordered set*）偏序集（*partially ordered set*），记作$(S, <)$。$a<b$称为a小于b或者a前于b。亦可称为b大于a或者b后于a。

例 1：集合S的幂集$p(s)$中按包含关系规定序关系，当且仅当$A \subset B$时，规定$A<B$，则$p(s)$是有序集。

显然任意二子集间不一定有序关系。

例 2：平面上二点$\alpha_1=(x_1, y_1), \alpha_2=(x_2, y_2)$间的序关系规定为

当$x_1^2+y_1^2<x_2^2+y_2^2$时，$\alpha_1<\alpha_2$，

当$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，$x_1<x_2$时，$\alpha_1<\alpha_2$，

当$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2, x_1=x_2, y_1<y_2$时，$\alpha_1<\alpha_2$。

则$<$关系是平面点集的序关系，按$<$关系平面点集是有序集。

例 3：平面上二点$\alpha_1=(x_1, y_1), \alpha_2=(x_2, y_2)$之间的序关系规定为当$x_1<x_2$时$\alpha_1<\alpha_2$，当$x_1=x_2, y_1<y_2$时，$\alpha_1<\alpha_2$。则$<$关系也是平面上的序关系，按此序关系，平面点集也是有序集。

例4：平面上二点$\alpha_1=(x_1, y_1), \alpha_2=(x_2, y_2)$之间规定当$x_1=x_2$，$y_1<y_2$时，为$\alpha_1<\alpha_2$，则这个$<$关系也是平面上的序关系。

由例2、3、4也可看出在同一集合中可以建立不同的序关系。

例 5：自然数集可按下列顺序（左小右大）规定各种序关系。

(a) 1，2，3，……… ………；

(b) ……… ………，3，2，1；

(c) 1，3，5，………，2，4，6，………；

(d) ………，5，3，1，2，4，6，………；

(e) 1，3，5，……… ………，6，4，2；

(f) ………，5，3，1，………，6，4，2；

在有序集S中用等号表示相同元素，如果$a=b$或$a<b$，则写做$a\leqslant b$，容易推出

定理 1：若$a\leqslant b$且$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$。

定义 2：设A为有序集S的子集，若有$a\in S$，对于A的任一元素x，恒有$x\leqslant a$时，称a为A的上界(*upper bound*)。有上界的集称为上方有界的(*bounded to the above*)。

相应的可以定义下界(*lower bound*)及下方有界(*bounded to the below*)。当上、下方都有界时，称为有界的(*bounded*)。

定义 3：当a是A的上界且$a\in A$时，a称为A的最大元(*maximum*)或最后元素、尾元素，以$\max A$表示之。

相应的有最小元（*minimum*）或最前元素，首元素的概念，记作$\min A$。

定义 4：在A的上界集中若有最小元，称为A的最小上界（*least upper bound*）或上确界（*supremum*），写做$\sup A$。

相应的有最大下界(*greatest lower bound*)或下确界(*infimum*)的概念，写做$\inf A$。

定义 5：集A的元素a，若对任何$x\in A$，$a<x$都不成立

时，a称为A的极大元($maxima$)。

相应的有极小元($minima$)的概念。

若 A 有最大（小）元，则它是一个极大（小）元。反之，极大（小）元未必是最大（小）元，一般的极大（小）元不是唯一的。

例 1：如在上述例3中，设 $A=\left\{\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\right):\ n,\ m\text{为自然数}\right\}$，则$\alpha=(a,\ b)$当$a>1$时为$A$的上界，而集$A$是上方有界的；当$a\leqslant 0$时，$\alpha$为$A$的下界，而集$A$是下方有界的。(1，1)为$A$的最大元，亦为上确界，但$A$无下确界。

例 2：在上述例4中，设 $A=\left\{\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\right):m=1,2\cdots\cdots,k;n\text{为自然数}\right\}$，$A$无上界亦无下界。$\left(\frac{1}{n},\ 1\right)$对任意$n$都是 A 的极大元，而$\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{k}\right)$对任意$n$都是$A$的极小元。

例 3：在上述例2中，设$A=\left\{\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\right):\ n,m\text{为自然数}\right\}$，(1，1)为$A$ 的最大元，A 为有界集，(0，0)为A的下确界，A无最小元。

例 4：在上述例 5 中，

(a) 有最前元素 1 而无最后元素；

(b) 有最后元素 1 而无最前元素。

(c) 奇数集有上界，偶数都是其上界。有上确界 2，但无最后元素。偶数集有下界，奇数都是其下界，2 是其最小元。

(d) 无最小元亦无最大元，1 为奇数集的最大元，2 为偶数集的最小元。

(*e*) 有最小元 1 和最大元 2， 奇数集无最大元。偶数集无最小元。

(*f*) 的讨论留给读者作为练习。

定义 6：有序集$(S, <)$若满足

（1）反对称性：若 $a<b$ 且 $b<a$，则 $a=b$，

（2）可比性：对相异元素$a, b\in S$，必有$a<b$或 $b<a$，

则称$<$为 S 的**线性序关系** (*linear ordering*)，**全序关系** (*total complete*) 或**单序关系** (*simple*)。S 称为**全序集** (*totally ordered set*) 或**线性序集**(*linearly ordered set*)。

定义 7：有序集S的子集A关于S的序也是有序集，称A为S的**序子集**。若A关于S的序为全序集时，称A为 S 的**全序子集**。全序集的序子集仍是全序集。

前例中例 1，4 不是全序集，而例 2，3，5 都是全序集。例 4 的子集

$$\{(a, y): y\text{为任意实数}\}$$

是平面上的全序子集。

定义 8：在全序集中，形如

$$\{x: a<x<b\}$$

的子集，以(a, b)表示之。称为**区间**(*interval*)。
形如

$$\{x: x<c\}$$

的子集，称为由c确定的**截段**(*segment*)。

例如在例 3 中，设 $\alpha_1=(1, 1)$，$\alpha_2=(2, 1)$，则

$$\{x: \alpha_1<x<\alpha_2\}$$

为区间(α_1, α_2)。

在例 2 中$\{\alpha: \alpha<(1, 1)\}$是由（1，1）确定的截段。

定义 9：当$a<c<b$时，称为 c 在a,b之间(*between*)。在全序集中任意二相异元素之间必有其它元素时，称该全序集为稠密的(*dense*)。当$a<b$而a，b 之间没有元素时，a 称为b的**直前元** (*immediately before*)，而 b 称为a的**后继元**或**直后元**(*immediately after*)。

如按数的大小关系，有理数集是稠密的。自然数集按大小关系不是稠密的。

例 5 中(a)有最前元 1， 1 没有直前元，其它元素都有直前元。每个元素都有后继元。

(b) 中每个元素都有直前元， 1 没有后继元， 其它元素都有后继元。

(c) 中 1 和 2 没有直前元， 其它元素都有直前元， 任何元素都有后继元，没有最后元素。

(d) 中没有最前元素和最后元素， 每个元素都有直前元和后继元。

(e) 中有最前元素 1 和最后元素 2， 1 没有直前元，2 没有后继元，其它元素都有直前元和后继元。

定义10：全序集 S 的每个有上界的非空子集必有上确界时，称序集S为序完备的(*order complete*)。

例如有理数集按<关系不是序完备的。如集合

$$\{x:\ x^2<2\}$$

是上方有界的，但在有理数集中无上确界。

实数集按<关系是序完备的（请参考数学分析的确界存在定理)。

定理 2：全序集 S 关于序关系是序完备的要充条件是每个有下界的非空子集必有下确界。

证明：设 S 是序完备的，A 为有下界的非空子集。设B

为A的所有下界集。则B是非空集且A的每个元素都是B的上界。由序完备性，B有最小上界b，则b小于或等于B的每个上界。特别的，b小于或等于A的每个元素。因之b是A的下界。另一方面，b是B的上界，即b大于或等于A的每个下界。故b是A的最大下界。

按同样的讨论方法可证明其充分性。

习　　题

1．在自然数集中，按

$$\cdots\cdots, 5, 3, 1, \cdots\cdots, 6, 4, 2$$

的序，讨论它的最大元、最小元、各元的直前元、后继元，奇数集及偶数集的上、下确界。

2．在偏序集$(S, <)$中，规定关系"$\leqslant$"为

$$<\cup\triangle$$

则$(S, \leqslant)$满足

(a)　$\triangle\subset\leqslant$,

(b)　$(\leqslant\cap\leqslant^{-1})=\triangle$,

(c)　$(\leqslant\circ\leqslant)\subset\leqslant$.

3．在例3中确定$(1, 1)$的截段。

4．设A为全序集，a_1、a_2为A的元素，$a_1<a_2$，以A_a表示A由a确定的截段，试证

$$A_{a_1}=(A_{a_2})_{a_1}.$$

§4．映射（mapping）

定义1：集合A和集合B的关系f，如果满足

（1）$D_f=A$,

（2）若 afb，afc，则$b=c$，

则称f为A到B的映射（*mapping*），记作$f: A \to B$。

可见映射是一种关系，条件（2）实际意味着映射是单值的二元关系。即对于A的任意元素a，有唯一的元素b，使afb。这个元素b常记作$f(a)$，称为映射f在元素a的象（*image*）或值（*value*）。用$f(a)=b$代替$(a, b)\in f$或afb。

定义 2：映射f的序对的集

$$G=\{(a, b): afb\}$$

称为映射f的图象（*graph*），A到B的所有映射的集是幂集$p(A\times B)$的子集，记作B^A。

由定义可知映射f的图象具有如下性质：

定理 1：设G为$f: A\to B$的图象，则

（1）对于A的各元素a，有$A\times B$的元素(a, b)，使$(a, b)\in G$。

（2）若$(a, b)\in G$且$(a, b')\in G$，则$b=b'$。

反之，具有这两个性质的$A\times B$的子集G也确定映射$f: A\to B$，使

$$(a, b)\in G \Longleftrightarrow b=f(a)。$$

和关系的情况一样，关于映射的所有性质可归结为关于图象的性质，映射和它的图象可不加区别。

例 1：常值映射（*constent mapping*）：$\{(x, b): x\in A\}$。

例 2：恒等映射（*identity mapping*）：$\{(a, a): a\in A\}$。

例 3：补映射$\complement$：$p(S)\to p(S)$：$\{(A, \complement A): A\subseteq S\}$。

例 4：第一射影（*first projection*）pr_1：$A\times B\to A$，$\{((a, b), a): (a, b)\in A\times B\}$；

第二射影（*second projection*）pr_2：$A\times B\to B$，$\{((a, b), b): (a, b)\in A\times B\}$。

例 5：χ：$p(s)\to\{0,1\}$，对任一子集$A\subset S$，

$$\chi_A(x)=1,\qquad 当x\in A,$$
$$\chi_A(x)=0,\qquad 当x\in \complement A。$$

称为A的特征函数(*characteristic function*)。集A的特征函数χ_A仅依赖于集A。因此这种特征函数的集合记作2^S和S的子集族$p(S)$之间互相一意确定。

对应(*correspondence*)、**变换**(*transformation*)、**映射**(*mapping*)、**函数**(*function*)、**算子**(*operator*)等在不同学科里的不同语言，它们都是同意语。在数学的各个分支中，根据它的历史往往是在其狭隘的意义下使用了不同的术语。如在分析学的分支里，往往是取值为实数或复数，分别称为实值函数(*real—valued function*)或复值函数(*complex—valued function*)。当定义域也是实数集或复数集时，分别称为实函数(*real function*)或复函数(*complex function*)。定义域包含在函数空间的数值函数称为泛函数(*functional*)，定义域及值域皆包含在函数空间中时称为**算子**，在$A=B$的情形下，常使用变换的语言。

函数的语言开始于*G. W. Leibniz*。他虽然没有给予这个术语以明确的定义，但和0，1等常数不同，是考虑变动的量的。和变数x同时变动的变数，如x^2，$\log_a x$，$\sin x$等称为x的函数。x的函数一般用记号$f(x)$，$\varphi(x)$等表示之。*L. Euler*把函数定义为“由变数和常数组成的解析式”(1748)；*A. L. Cauchy*叙述为“多个变数之间有某个关系，和其中一个的取值同时，其它的值也确定时，通常用那一个变数将其它的表示出来。这个变数称为自变数，其它的称为它的函数”(1823)。*Cauchy*和*Euler*站在同一立场上，在很多情形下处理了函数。*P. G. Direchlet*指出“y在全区间不仅不必

要随着同一法则与x有关，而且也不必要将其关系用数学解析式表示出来"。结局明确了函数不外是对应而已（1837）。尔后，什么是函数，人们有着各种不同的定义。如说变量y随着变量x一起变化而且依赖于x时，称y为x的函数；又如函数是依另一变量（自变量）而变的变量等等，这些说法都是不确切的，如$y=\sin^2 x+\cos^2 x$是函数，但y并不随着x变化。

在今天，函数的概念和集合的概念一样，在数学中起着基础的作用。我们用映射的语言，更深刻地反映了函数的实质。

定义 3：映射f，g若满足

（1）$D_f=D_g$

（2）$f(x)=g(x)$，对于$x\in D_f$。

则称映射f和g相等(*equality*)。

定义 4：设f：$A\to B$，$A'\subset A$。B的子集

$\{b$：存在$a\in A'$，使$f(a)=b\}$

称为A'在f之下的象(*image*)，记作$f(A')$。

由定义可推得

定理 2：（1）$A'\neq\phi\Longleftrightarrow f(A')\neq\phi$；

（2）对每个$a\in A$，$f(\{a\})=\{f(a)\}$。

定理 3：$f(A')=P_{r_2}(f\cap(A'\times B))$

证明：若$b\in f(A')$，则有$a\in A'$，使$f(a)=b$。于是$(a,b)\in f$，且$(a,b)\in A'\times B$。故$(a,b)\in f\cap(A'\times B)$，而$P_{r_2}(a,b)=b$，即$b\in P_{r_2}(f\cap(A'\times B))$。

反之，若$b\in P_{r_2}(f\cap(A'\times B))$，则有$(a,b)\in f\cap(A'\times B)$。即$(a,b)\in A'\times B$且$f(a)=b$，故$b\in f(A')$。

总之，$f(A')=P_{r_2}(f\cap(A'\times B))$。

定理 4：设$f: A\to B$，A_1，A_2为A的子集，则

（1）若$A_1\subset A_2$，则$f(A_1)\subset f(A_2)$。

（2）$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$。

（3）$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$。

证明：（1）是明显的。

由（1）可直接推得（2）。

现证明（3）。由（1）有

$$f(A_1)\subset f(A_1\cup A_2)\text{及}f(A_2)\subset f(A_1\cup A_2),$$

故

$$f(A_1)\cup f(A_2)\subset f(A_1\cup A_2)。$$

另一方面，若$b\in f(A_1\cup A_2)$，则有$a\in A_1\cup A_2$，使$b=f(a)$，即$a\in A_1$或$a\in A_2$，使$b=f(a)$。故$b\in f(A_1)$或$b\in f(A_2)$。即

$$f(A_1\cup A_2)\subset f(A_1)\cup f(A_2)。$$

总之，有

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)。$$

要注意，未必有，

$$f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2),$$

例如$A_1\cap A_2=\phi$，在$A_1\cup A_2$上的常值映射$f(a)=b$，则左端为空集而右端为$\{b\}$。

定义 5：对于B的任意子集B'，A的子集

$$\{a:\ a\in A,\ f(a)\in B'\}$$

称为在f下B'的原象(*inverse image*)写做$f^{-1}(B')$。

于是有下列结果：

定理 5：$f^{-1}(B')=P_{r_1}(f\cap(A\times B'))$。

证明：$a\in f^{-1}(B')\Longleftrightarrow$有$a\in A$，使$f(a)=b\in B'$

$$\Longleftrightarrow(a,b)\in f\text{且}(a,b)\in A\times B'$$

$$\Longleftrightarrow (a,b) \in f \cap (A \times B')$$
$$\Longleftrightarrow a \in P_{r_1}(f \cap (A \times B'))$$

故

$$f^{-1}(B') = P_{r_1}(f \cap (A \times B'))。$$

定理 6：$f^{-1}(B') = f^{-1}(B' \cap f(A))$。

证明：$a \in f^{-1}(B') \Longleftrightarrow$ 有 $b \in B'$ 使 $f(a) = b$

$\Longleftrightarrow$ 有 $b \in B' \cap f(A)$，使 $f(a) = b$

$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(B' \cap f(A))$

故

$$f^{-1}(B') = f^{-1}(B' \cap f(A))。$$

容易看出：

$$f^{-1}(\phi) = \phi$$

即空集的原象是空集。但非空集的原象也可能是空集。如当 $B' \cap f(A) = \phi$ 时，$f^{-1}(B')$ 是空集。

定理 7：设 B_1，B_2 为 B 的子集，则

（1）若 $B_1 \subset B_2$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$，

（2）$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$，

（3）$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$，

（4）$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$。

证明：（1）是显然的。

（2）$a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Longleftrightarrow$ 有 $b \in B_1 \cap B_2$，使 $f(a) = b$

$\Longleftrightarrow$ 有 $b \in B_1$ 且 $b \in B_2$，使 $f(a) = b$

$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(B_1)$ 且 $a \in f^{-1}(B_2)$

$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

即

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

（3）的证明方法和（2）相同，故略去不证。

（4） $a\in f^{-1}(B_1\setminus B_2)\Longleftrightarrow$有$b\in B_1\setminus B_2$使$f(a)=b$

$\Longleftrightarrow f(a)=b\in B_1$且$f(a)=b\notin B_2$

$\Longleftrightarrow a\in f^{-1}(B_1)$且$a\notin f^{-1}(B_2)$

$\Longleftrightarrow a\in f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$

即

$$f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)。$$

当 $B=\{b\}$时，$f^{-1}(\{b\})$也写做 $f^{-1}(b)$，于是 $f(a)=b\Longleftrightarrow a\in f^{-1}(b)$，显然未必有 $\{a\}=f^{-1}(b)$。如A到 B 的常值映射$f(a)=b$，$f^{-1}(b)=A$。

定理 8：设$A'\subset A$，$B'\subset B$，则有

（1） $f(f^{-1}(B'))=B'\cap f(A)$，

（2） $f^{-1}(f(A'))\supset A'$。

证明：（1） $b\in f(f^{-1}(B'))\Longleftrightarrow$有$a\in f^{-1}(B')$使$f(a)=b$，

而$a\in f^{-1}(B')\Longleftrightarrow$有$b'\in B'$使$f(a)=b'$，

由映射的定义，由(a, b)及$(a, b')\in f$，故

$$b=b'。$$

从而

$b\in f(f^{-1}(B'))\Longleftrightarrow$有$a\in A$，$b\in B'$使 $f(a)=b$，

$\Longleftrightarrow b\in B'$ 且 $b\in f(A)$

$\Longleftrightarrow b\in B'\cap f(A)$。

（2） 的证明是容易的，留给读者做为练习。

关于积空间的映射，有

定理 9：设$A_1\subset A$，$B_1\subset B$，则

（1） $P_{r_1}^{-1}(A_1)=A_1\times B$

（2） $P_{r_2}^{-1}(B_1)=A\times B_1$

（3）对于$A\times B$的任意子集C，有

$$C\subset P_{r_1}(C)\times P_{r_2}(C)。$$

证明： 因$P_{r_1}^{-1}(\{a\})=\{a\}\times B$，$P_{r_2}^{-1}(\{b\})=A\times\{b\}$

故

$$P_{r_1}^{-1}(A_1)=\bigcup_{a\in A_1}(\{a\}\times B)=A_1\times B$$

$$P_{r_2}^{-1}(B_1)=\bigcup_{b\in B_1}(A\times\{b\})=A\times B_1$$

（3）的证明，若

$$(a,b)\in C,$$

则

$$P_{r_1}((a,b))=a,\ \ P_{r_2}((a,b))=b,$$

故

$$a\in P_{r_1}(C),\ \ b\in P_{r_2}(C),$$

于是

$$(a,b)\in P_{r_1}(C)\times P_{r_2}(C),$$

而

$$C\subset P_{r_1}(C)\times P_{r_2}(C)。$$

习　　题

1．若$A\supset A_1\supset A_2$，则$f(A_1\setminus A_2)\supset f(A_1)\setminus f(A_2)$，并举出不等的例子。

2．设f：$A\to B$，$A_1\subset A$，试讨论$f(A\setminus A_1)$与$B\setminus f(A_1)$之间的关系，并举出下列各种情况的例子。

(a) $f(A\setminus A_1)\subset B\setminus f(A_1)$，

(b) $f(A\setminus A_1)\supset B\setminus f(A_1)$，

(c) $f(A\setminus A_1)$与$B\setminus f(A_1)$互不包含。

3．试证$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$。

4．对于积$A\times B$的任意子集G，A的任意子集A_1，B的任意子集B_1，令

$$G(A_1)=P_{r_2}(G\cap(A_1\times B))$$

$$G^{-1}(B_1)=P_{r_1}(G\cap(A\times B_1))$$

证明下列四个性质是等价的。

(a) G是A的子集到B的映射的图象，

(b) 对于B的任一子集B_1，$G(G^{-1}(B_1))\subset B_1$，

(c) 对于B的任一子集对B_1，B_2有

$G^{-1}(B_1\cap B_2)=G^{-1}(B_1)\cap G^{-1}(B_2)$，

(d) 对于B的任一子集对B_1，B_2，若$B_1\cap B_2=\phi$，则

$G^{-1}(B_1)\cap G^{-1}(B_2)=\phi$。

§ 5. 满射(Surjection)，单射(injection)

设f: $A\to B$，由定义知f的定义域就是A，而值域未必是B，它是B的子集

$$\{b: 有 a\in A, 使 f(a)=b\}。$$

特别地，有下述定义：

定义 1： 当$E_f=B$时，称f为A到B上(*onto*)的映射，或满射(*surjection*)。

定义 2： 若对于A的任意相异二元a_1，a_2，恒有$f(a_1)\neq f(a_2)$时，称f为1：1映射(*one—to—one mapping*)或单射(*injection*)。

定义 3： 若f是满射也是单射时，称f为双射 (*bijec-*

tion)。

A到B的任何映射都可以看做是A到$f(A)$的满射，且若它是单射，则f是A到$f(A)$的双射。

例 1：设A_1为A的子集，恒等映射I：$A_1\to A$，使$I(a)=a$，则I是A_1到A的单射，是A_1到A_1的双射。

例 2：设f：$A\to B$。则映射G：$A\to A\times B$，使$a\to(a,\ f(a))$是单射。

例 3：$A\times B$到A及B上的射影P_{r_1}及P_{r_2}都是满射。

例 4：任何集的恒等映射都是双射。

例 5：$p(S)$到本身的映射$A\to CA$是双射。

例 6：若$B=\{b\}$为单元素集，A到$A\times B$的映射$a\to(a,\ b)$是双射。

例 7：$A\times B$到$B\times A$的映射$(a,b)\to(b,a)$是双射。

例 8：设$A=(0,1)$，$B=(-\infty,\infty)$，$f(x)=\operatorname{tg}\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$为$A$到$B$的双射。

定理 1：设f：$A\to B$。

（1）若f为单射，则对于A的任意子集A_1，有$f^{-1}(f(A_1))=A_1$，

（2）若f为满射，则对于B的任意子集B_1，有$f(f^{-1}(B_1))=B_1$。

证明：（1）因f是单射，若$f(a)=b$，则$f^{-1}(b)=a$. 故若$f(A_1)=B_1$，则$f^{-1}(B_1)=A_1$，而$f^{-1}(f(A_1))=A_1$。

（2）根据§4 定理 8（1），有

$$f(f^{-1}(B_1))=B_1\cap f(A)。$$

因f是满射，故$f(A)=B$，而

$$f(f^{-1}(B_1))=B_1\cap B=B_1。$$

定义 4：若f是双射，由关系$b=f(a)$确定B到A的映射$b\to a$，称为f的逆映射（*inverse mapping*）也写做f^{-1}。

当f^{-1}不是双射时，f^{-1}不是映射。

由定义直接推得

定理 2：若f^{-1}为f的逆映射，则

（1）$b=f(a)\Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$，

（2）f^{-1}是双射，

（3）$(f^{-1})^{-1}=f$，

（4）对于B的每个子集B_1，在逆映射f^{-1}下B_1的象与在映射f下B_1的原象相等。

值得注意的是f^{-1}这一符号的含义。以前f^{-1}这个记号表示f的原象，现在又表示f的逆映射，能否发生混淆？由本定理之（4）可以看到当f有逆映射时二者是一致的。当f没有逆映射时，f^{-1}只能表示原象，不会发生混淆，故采用了同一记号。

关于原象所具有的性质，当然对逆映射也都成立，而且有更好的结果。如本节定理1与§4定理8相比较就可看出。

定理 3：设$f: A\to B$，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$是$A$的子集族，则

（1）$f(\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in L}f(A_\lambda)$，

（2）$f(\bigcap_{\lambda\in L}A_\lambda)\subset\bigcap_{\lambda\in L}f(A_\lambda)$。

证明：（1）$b\in f(\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda)\Longleftrightarrow$有$a\in\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$使$b=f(a)$

$\Longleftrightarrow$有$\lambda_0\in L$，$a\in A_{\lambda_0}$，使$f(a)=b$

$\Longleftrightarrow$有$\lambda_0\in L$，使$b\in f(A_{\lambda_0})$

$\Longleftrightarrow b\in\bigcup_{\lambda\in L}f(A_\lambda)$

（2）$b\in f(\bigcap_{\lambda\in L}A_\lambda)\Longrightarrow$有$a\in\bigcap_{\lambda\in L}A_\lambda$，使$f(a)=b$

$\Longrightarrow$对任一$\lambda\in L$，均有$a\in A_\lambda$，使$f(a)=b$

$\Longrightarrow$对任一$\lambda\in L$，均有$b\in f(A_\lambda)$

$\Longrightarrow b\in\bigcap_{\lambda\in L}f(A_\lambda)$

故

$$f(\bigcap_{\lambda\in L}A_\lambda)\subset\bigcap_{\lambda\in L}f(A_\lambda)。$$

定理 4：设f：$A\to B$，$\{B_\lambda\}_{\lambda\in L}$是$B$的子集族，则

（1）$f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in L}f^{-1}(B_\lambda)$，

（2）$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in L}B_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in L}f^{-1}(B_\lambda)$。

证明：（1）$a\in f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda)\Longleftrightarrow f(a)\in\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda$

$\Longleftrightarrow$有$\lambda_0\in L$使$f(a)\in B_{\lambda_0}$。

$\Longleftrightarrow$有$\lambda_0\in L$使$a\in f^{-1}(B_{\lambda_0})$

$\Longleftrightarrow a\in\bigcup_{\lambda\in L}f^{-1}(B_\lambda)$。

（2）$a\in f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in L}B_\lambda)\Longleftrightarrow f(a)\in\bigcap_{\lambda\in L}B_\lambda$

$\Longleftrightarrow$对每个$\lambda\in L$，有$f(a)\in B_\lambda$

$\Longleftrightarrow$对每个$\lambda\in L$，有$a\in f^{-1}(B_\lambda)$

$\Longleftrightarrow a\in\bigcap_{\lambda\in L}f^{-1}(B_\lambda)$。

定义 5：设A，B，C为三集，$f: A\to B$，g：$B\to C$，则$a\to g(f(a))$是A到C的映射，称之为g和f（在这个顺序下）的复合（*composed*），写做$h=g\circ f$。

由复合的定义立即推得

定理 3：设$h=g\circ f$，则

（1）对任意$A_1\subset A$，有$h(A_1)=g(f(A_1))$，

（2）对任意$C_1\subset C$，有$h^{-1}(C_1)=f^{-1}(g^{-1}(C_1))$。

由定义也可直接推得

定理 4：（1）若 f，g 都是单射，则 $h=g\circ f$ 也是单射。

（2）若 f，g 都是满射，则 $h=g\circ f$ 也是满射。

（3）若 f，g 都是双射，则 $h=g\circ f$ 也是双射。

（4）若 f，g 都是双射，则 h 的逆映射 h^{-1} 存在且 $h^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

（5）若 f 是双射，则 $f^{-1}\circ f$ 是 A 的恒等映射，而 $f\circ f^{-1}$ 是 B 的恒等映射。

定理 5（结合律成立）：设 $f: A\to B$, $g: B\to C$, $h: C\to D$ 则

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f。$$

证明：设 $f(a)=b$，$g(b)=c$，$h(c)=d$，则

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c,$$

$$(h\circ g)(b)=h(g(b))=h(c)=d,$$

故

$$[h\circ(g\circ f)](a)=h[(g\circ f)(a)]=h(c)=d,$$

$$[(h\circ g)\circ f](a)=(h\circ g)[f(a)]=(h\circ g)(b)=d。$$

故

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f。$$

根据定理 5 可定义 3 个映射的复合 $h\circ g\circ f$ 为 $h\circ(g\circ f)$。用数学归纳法可以定义任意有限个映射的复合为

$$f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1=f_n\circ[f_{n-1}\circ(\cdots(f_2\circ f_1))]$$

定义 6：设 A 为 B 的子集，对每个 $x\in A$，由 $f(x)=x$ 确定的映射称为 A 到 B 的包含映射（*inclusion mapping*），或嵌入(*embedding*)。

定义 7：设 f: $B\to C$，g: $A\to C$，$A\subset B$，若对于任意 $x\in A$，恒有

$$g(x)=f(x),$$

则称映射g为映射f在A上的限制(*restriction*)，而f称为g到B上的扩张(*extension*)，写做

$$g=f\mid A。$$

设f: $A\to B$, $A=A_1\times A_2$. 当$a=(a_1,a_2)$时 $f(a)=b$可写做$f(a_1,a_2)=b$。当 $B=B_1\times B_2$ 时，设 $b=(b_1,b_2)$，则$f(a_1,a_2)=b$可写做$f(a_1,a_2)=(b_1,b_2)$.

定义 8：设 $A=A_1\times A_2$，$B=B_1\times B_2$，f_i：$A_i\to B_i$ $(i=1, 2)$，由 $(a_1,a_2)\to(f_1(a_1),f_2(a_2))$ 确定的映射 f: $A_1\times A_2\to B_1\times B_2$ 称为f_1与f_2 的**直积映射** (*direct product mapping*)，以$f=f_1\times f_2$表示之。

关于集合的直积的概念，可推广到任意集族上去。

定义 9：设$\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$为集合$S$的子集族。对于各$\lambda\in L$，使 $f(\lambda)\in A_\lambda$的 f 全体组成的集 P 称为 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ 的 **直积集** (*direct product sets*)，写做

$$P=\prod_{\lambda\in L}A_\lambda。$$

A_λ称为P的**直积因子**(*direct product factor*)。

定义10：P的元素f恒可表示为

$$(x_\lambda)_{\lambda\in L}$$

的形式，其中$x_\lambda=f(\lambda)$称为f的 **λ 分量**(*component*)**或 λ 坐标**(*coordinate*)，使(x_λ)对应x_λ的映射写作

$$P_{r_\lambda}$$

称为P在λ分量上的**射影**(*projection*)。

习　　题

1. 设 $f: A\to B$，指出下列诸条件等价：

(a) f是单射。

(b) 对于A的任一子集A_1，恒有$f^{-1}(f(A_1))=A_1$。

(c) 对于A的任意子集对A_1，A_2，恒有

$f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$。

(d) 对于A的任意子集对A_1，A_2，若$A_1\cap A_2=\phi$，则$f(A_1)\cap f(A_2)=\phi$。

(e) 对于A的任意子集对A_1，A_2，若$A_1\subset A_2$，则$f(A_2\setminus A_1)=f(A_2)\setminus f(A_1)$。

2. 设f: $A\to B$，g: $B\to C$，h: $C\to D$，指出：如果$g\circ f$和$h\circ g$是双射，则f，g，h全是双射。

3. 设f: $A\to B$，g: $B\to C$，h: $C\to A$，指出：如果映射$h\circ g\circ f$，$g\circ f\circ h$，$f\circ h\circ g$之中两个是满射，另一个是单射；或两个是单射，另一个是满射，则映射f，g，h都是双射。

4. 设F是$A\times B$的子集，G是$B\times A$的子集，如果对于任意$a\in A$，$G[F(a)]=\{a\}$，且对任意$b\in B$，$F[G(b)]=\{b\}$，试指出：F是A到B上的双射的图象，而G是F的逆图象。

5. 设A，B是两个集合，f是A到B的单射，g是B到A的单射，试指出：存在A的两个子集A_1，A_2，使$A_2=A-A_1$。并存在B的两个子集B_1，B_2，使$B_2=B-B_1$。而且$B_1=f(A_1)$及$A_2=g(B_2)$。

第三章　基　　数 (Cardinal number)

§1. 等势性(equipollence)

对于两个有限集，我们常常要比较它们的元素多寡。当然数一下它们含有的元素个数就可以解决问题。然而实际中有时难以一一数清，也可采取另外一个办法。例如会场上准备的椅子和参加会议的人数孰多？可以让大家坐下，每人坐一张椅子，坐下后，如果还有空位就是椅子多；如果还有人没有椅子坐就是人多；如果大家都坐下了没有空位，就是人和椅子一样多。

当集合中的元素数不过来的时候，用数数的办法来比较两个集合的元素多寡是办不到的。只能用这后一种方法。在这种情况下，往往会发生和直观不符合、和习惯相矛盾的现象。例如，问有理数与自然数孰多？人们自然会回答有理数多。自然数一定是有理数，而有理数未必是自然数，甚至任意两个有理数之间都有无限多个有理数，其间最多有有限个自然数，甚至可能没有自然数。但是在我们的比较方法下，后面将要指出它们一样多。这是无限集和有限集的不同点。在处理无限集时凭直观和习惯是不容许的。对于初学者必须引起足够的注意。我们为了论述一般化，给出下述定义。

定义 1： 若集合 A 到集合 B 有双射存在，则称 A 等势(*equipotent*)于 B，记作 $A \sim B$.

例 1：$[0,1]$等势于$[0,10]$，双射为 $y=10x$。

例 2：$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$等势于实数集，双射为$y=\operatorname{tg}x$。

例 3：自然数集等势于偶数集，双射为 $y=2x$。

例 4：自然数集等势于集合$\{\frac{1}{n}:n$ 为自然数$\}$，双射为 $y=\frac{1}{x}$。

例 5：圆周上的点集合等势于$[0,2\pi)$。

由双射的特征即可推出

定理 1：两有限集等势的要充条件是二者的元素个数相同。

定理 2：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$。

实际上，若 f：$A\to B$ 是双射，则 f^{-1}：$B\to A$ 也是双射，故若 $A\sim B$，则有 $B\sim A$。

由于等势性是对称的，故谈到 A 等势于 B 时，也可以说 B 等势于 A，或 A 与 B 等势。

定理 3：等势关系是等价关系。

证明：恒等映射是双射，故由 I：$A\to A$ 知 $A\sim A$，即自反性成立。

由定理 2 知对称性成立。

若 $A\sim B$，$B\sim C$，则有双射 $f:A\to B$，$g:B\to C$。则 $g\circ f:A\to C$ 也是双射，故 $A\sim C$，即可迁性成立。

故等势关系是等价关系。

定义 2：按等势的等价关系将集合分类，一切与集合 A 等势的集合归于一类，这类的特征以记号$\overline{\overline{A}}$表示，称为A 的**基数**(*cardinal number*)或**势**(*power*)。

由等价关系可知，一切与 A 等势的集合，其基数皆为

$\overline{\overline{A}}$，与代表的选取无关。基数的概念就是元素个数概念的推广。

定义 3：小于或等于某个自然数 n 的自然数集，即集

$$\{x: x\in N \text{ 且 } x\leqslant n\}$$

称为自然数列的一个**截段**（*segment*）。和自然数列的截段等势的集合称为**有限集**（*finite set*），否则称为**无限集**（*infinite set*）。空集也是有限集。

显然，这个有限集的概念与第一章 §1 提到的有限集的概念是一致的。有限集等势的特征是它们的元素个数相同。有限集的基数就是该集的元素个数。故 n 就是一切 n 个元素的集合的基数。n个元素的集合恒可排列为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}。$$

无限集没有元素个数的概念，它的特征就是它的基数。

定理 4：集列$\{A_n\}_{n\in N}$，$\{B_n\}_{n\in N}$若满足：

（1） 对任意 $n\neq n'$，有 $A_n\cap A_{n'}=\phi$，$B_n\cap B_{n'}=\phi$，

（2） 对任意 $n\in N$，有 $A_n\sim B_n$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n。$$

证明：因 $A_n\sim B_n$，故有双射 $f_n: A_n\to B_n$ 做

$$f: A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\to B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

当 $x\in A_n$ 时，$f(x)=f_n(x)$，$(n=1,2,\cdots)$，则 f 是A到 B 的双射。

实际上，对任意$b\in B$，必有n_0使$b\in B_{n_0}$，则由

$$A_{n_0}\sim B_{n_0}$$

有 $a \in A_{n_0}$，使 $f_{n_0}(a) = b$，由 f 的定义，有 $f(a) = b$。故 f 是满射。

若 $a_1, a_2 \in A$，$a_1 \neq a_2$，则有 n_1, n_2 使 $a_1 \in A_{n_1}$，$a_2 \in A_{n_2}$。当 $n_1 \neq n_2$ 时，$f(a_1) = f_{n_1}(a_1) = b_1 \in B_{n_1}$，而 $f(a_2) = f_{n_2}(a_2) = b_2 \in B_{n_2}$。因 $B_{n_1} \cap B_{n_2} = \phi$，故 $f(a_1) \neq f(a_2)$。当 $n_1 = n_2$ 时，$f(a_1) = f_{n_1}(a_1) = b_1 \in B_{n_1}$，$f(a_2) = f_{n_1}(a_2) = b_2 \in B_{n_1}$。因 f_{n_1} 是双射，而 $a_1 \neq a_2$，故 $f(a_1) = f_{n_1}(a_1) \neq f_{n_1}(a_2) = f(a_2)$，故 f 是单射。

习　　题

1. 试证：任意两个开区间是等势的，$(a, b) \sim (c, d)$。
2. 试证：$(0, 1)$ 与实直线等势。
3. 试证：圆周上的点集与 $[a, b)$ 等势。
4. 有限集不能与其任一真子集等势。
5. 设 $A \sim B$，$A_1 \sim B_1$，$A \supset A_1$，$B \supset B_1$，问是否必有 $A \setminus A_1 \sim B \setminus B_1$？

§2. 基数的比较

要想使基数成为元素个数的概念的推广，基数之间必须可以比较。设 A_1 的基数为 α_1，A_2 的基数为 α_2，如何比较 α_1 与 α_2 孰大呢？当 α_1，α_2 为有限时，α_1 与 α_2 都是非负整数，自然可以按数的大小进行比较。但当 α_1, α_2 为无限时，就不能这样直接比较了。为了讨论基数的比较方法，先观察有限集。

当 α_1, α_2 为有限时，若 $\alpha_1 < \alpha_2$，则 A_2 的元素数目比 A_1 的元素数目多。这时 A_2 的一部分可以和 A_1 一样多。但 A_1

的任何部分也不能和 A_2 一样多。据此，产生比较基数的方法。

定义 1：设 $\overline{\overline{A}}=\alpha$，$\overline{\overline{B}}=\beta$，若 A 有真子集 A_1，使 $A_1\sim B$，则规定$\alpha\geqslant\beta$。且若A与B不等势时，规定 $\alpha>\beta$。

由定义可直接看出单调性成立。即若$B\subset A$，则$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$。

值得注意的是可能发生 A 有真子集和 B 等势，而 B 也有真子集和A等势的情形。例如 $A=[0,2]$，$B=[0,3]$，$A_1=B_1=[0,1]$。建立双射为

$$x=\frac{y-a}{b-a}$$

当$a=0$，$b=2$时得到$A\sim B_1$；而当
$a=0$，$b=3$时得到$B\sim A_1$。

这种现象在有限集时是不会发生的，对于无限集虽然发生了，但也并不妨碍比较基数的大小。上例恰好是 $\alpha\leqslant\beta$、和 $\beta\leqslant\alpha$ 同时成立。为了证明基数的比较是合理的，需要证明 *Cantor-Bernstein* 定理，为此先证引理。

引理：$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$ <-->B到A有单射。

证明：由定义

$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}\Longleftrightarrow A$ 有真子集 A_1，使$A_1\sim B$

$\Longleftrightarrow$有双射 $\varphi:B\to A_1$（即 $\varphi(B)=A_1$）

$\Longleftrightarrow$有单射 $\varphi:B\to A$。

定理(*Cantor-Bernstein*)：若$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$且$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

证明：由条件$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$及$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，根据引理有单射 $f:A\to B$ 及单射 $g:B\to A$。

将 A，B 按下述方法各分为三个集 A_1，A_2，A_3 及 B_1，B_2，B_3的直并。即

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$
$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

对于 A 的任一元素 a_1，观察 $g^{-1}(a_1)$，若 $g^{-1}(a_1) = b_1 \in B$，再看 $f^{-1}(b_1) = a_2$，$g^{-1}(a_2) = b_2$，……如此继续下去。如果可以无限制做下去，则这里出现的 a_1, a_2、…都属于 A_1，$b_1, b_2, \cdots$都属于 B_1。

如果由a_1开始，到 $a_n = f^{-1}(b_{n-1})$，但$g^{-1}(a_n)$不存在，则称这样的 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ 是终于a_n的。将这样的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$属于 A_2，b_1、$b_2, \cdots$，b_{n-1}属于 B_2。

如果由 a_1 开始，到 $b_n = g^{-1}(a_n)$，但 $f^{-1}(b_n)$ 不存在，则称这样的 $a_1, a_2, \cdots$，$a_n, b_1, b_2, \cdots$，b_n，是终于 b_n 的。将这样的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 属于 A_3，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 属于 B_3。

即将终于 A 的元素各分在 A_2, B_2 内，终于 B 的元素各分在 A_3, B_3内，无限做下去的元素分在 A_1，B_1内。按这种分类法每个元素都恰好分在一个类中。

实际上，因f, g 都是单射，每个元素的原象都至多是唯一的。故 A 的元素必属于 A_1、A_2, A_3 之一而且只属于其一。B 的元素必属于 B_1, B_2, B_3 之一而且也只属于其一。故

$$A = A_1 + A_2 + A_3, B = B_1 + B_2 + B_3$$

是直和。

由分类法可看出 f 是 A_1 到 B_1 的双射，实际上，若 $a \in A_1$，则 $f(a)$必在 B_1中，因用上述追溯原象的方法必都可无限制地追溯下去。故

$$f(A_1) \subset B_1.$$

又因 B_1的每个元素在 f 下的原象必在 A_1中，故 f 是满射。由条件 f 是单射，故 f 是 A_1到B_1 的双射。

同理 f 是 A_2到B_2 的双射，g 是 B_3到A_3 的双射。做映

射

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in A_1)\\ f(x) & (x\in A_2)\\ g^{-1}(x) & (x\in A_3)\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 是 A 到 B 的双射。故 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

推论 1：基数 α 与 β 间下述三个关系中任何两个不能同时成立。

$\alpha=\beta,\quad \alpha<\beta,\quad \alpha>\beta$。

实际上，取基数为 α,β 的集分别为 A,B，

若　$\alpha=\beta$，　　则　$A\sim B$。

若　$\alpha<\beta$，　　则　$A\sim B_1\subset B$，且 A 无子集与 B 等势。

若　$\alpha>\beta$，则　$B\sim A_1\subset A$，且 B 无子集与 A 等势。

这三者是互不相容的，即任意二者不能同时成立。应用极大原理可以证明任意两个集合的基数都能比较。

推论 2：若 $A\subset B\subset C$，$A\sim C$，则 $B\sim C$。

实际上，由单调性有 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{C}}$，因 $A\sim C$，故 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{C}}$。故 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{C}}$ 且 $\overline{\overline{C}}\leqslant\overline{\overline{B}}$。由定理可知

$$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}。$$

推论 3：基数的大小关系是序关系。

实际上，设 $\overline{\overline{A}}=\alpha$，$\overline{\overline{B}}=\beta$，$\overline{\overline{C}}=\gamma$，当 $\beta<\gamma$，$\alpha<\beta$ 时，必有 $\alpha<\gamma$。

因 $\alpha<\beta$，必有 $B_1\subset B$ 使 $A\sim B_1$，因 $\beta<\gamma$，必有 $C_1\subset C$，使 $B\sim C_1$。也必有 $C_2\subset C_1$，使 $B_1\sim C_2$，于是 $A\sim B_1\sim C_2\subset C$，故 $\alpha\leqslant\gamma$。

若 $\alpha=\gamma$，则 $A\sim C$，由推论 2 有 $B\sim C$，而 $\beta=\gamma$，与假设矛盾。故 $\alpha\neq\gamma$，从而有 $\alpha<\gamma$。

习　　题

设 A、B、C是三个集合，$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{C}}$，$A\cap B=\phi$，$A\cap C=\phi$，是否必有$\overline{\overline{A\cup B}}>\overline{\overline{A\cup C}}$？

§ 3. 可列集(denumerable set)

自然数全体所成之集

$$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

在无限集中占有重要地位。

定义 1： 与N等势的集称为**可列集** (*countable set*, *denumeroble set*)。可列集的基数以 a 表示之。

下面列出一些可列集的例子：

$\{n^2\}_{n\in N}=\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\}$

$\{n^3\}_{n\in N}=\{1,8,27,64,\cdots,n^3,\cdots\}$

$\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$

$\{2n\}_{n\in N}=\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}$

$\{10^n\}_{n\in N}=\{10,10^2,10^3,10^4,\cdots,10^n,\cdots\}$

由上述例子可以看出，这些不同的数集是相互等势的。它们都是可列集。

定理 1： 集合A是可列集的要充条件是可以把它排列为

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

(当$i\neq j$时，$a_i\neq a_j$)的形式。

证明： 若集合 A 可以写成

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

(当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$)的形式时，令 $\varphi(n)=a_n$，则 φ 是 N 到 A 的双射，故 $N \sim A$. 从而 A 是可列集。

反之，若 A 是可列集，即 $N \sim A$，亦即有双射 $\varphi: N \to A$. φ 将 n 写为 a_n，则 A 可写为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

的形式。

定理 2： 任何无限集必含有可列子集。

证明： 设 A 为无限集，于是 $A \neq \phi$，从其中取某个元素 a_1。假设在 A 中已取出 n 个不同的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，因 A 是无限集，故

$$A \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \phi。$$

因而可以取元素

$$a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}。$$

按照归纳原则，对于任何 n，在 A 中存在一个含有 n 元素的子集

$$A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

于是所有集 $\{A_n\}$ 的并集 A_0 为

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

是 A 的可列子集。

推论： 在无限集的基数中可列集的基数 a 是最小的。

定理 3： 可列集的任何无限子集是可列集。

证明： 设 A 是可列集，B 为 A 的无限子集，由基数的单调性有 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$。由定理 2，$B$ 含有可列子集 A_1，同理有 $\overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A_1}}$。但 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A_1}} = a$，由 §2定理 $\overline{\overline{B}} = a$。即可列集的任何无限子集是可列集。

推论 1： 任意可列集 A 除去一个有限集 M 所得的集 $A—M$ 是可列集。

实际上，$A—M$ 是可列集 A 的无限子集。

推论 2： 可列集的任一子集是至多可列集（*at most denumerable*）即有限集或可列集。

推论 3： 任一无限集去掉有限集，基数不变。

定理 4： 任意有限个或可列个可列集的并集仍是可列集。

证明： 就可列的情况证明之。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都是可列集，则由定理 1，它们都可排列为

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, \cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

每个元素 a_{mn} 的下标和为 $m+n$，称为该元素的高度。按高度的大小顺序排列，高度相同者按第一个下标的大小顺序排列，于是将 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素排列为

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots, a_{1n}, a_{2n-1}, \cdots, a_{n1}, \cdots$$

如果 A_i 间有相同元素 x，则 x 必出现若干次。只留下第一次出现者，其余的都删去。则得出 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素和自然数集间的等势，故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可列集。

推论： 有理数集是可列集。

实际上，设 $A_m = \{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots, \frac{n}{m}, \cdots\}, m = 1, 2, \cdots$，由定理知正有理数集是可列集。

同理负有理数集也是可列集。

有理数集 = 正有理数集 $\cup$ 负有理数集 $\cup \{0\}$，故为可列集。

定理 5：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为可列集，则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 为可列集。

为了证明定理，先证下述引理：

引理：$N \times N$ 是可列集。

证明：确定映射 $\varphi: N \times N \to N$，令

$$\varphi(a,b) = (a+b)(a+b+1)/2+b$$

对于 $N \times N$ 的任意二点 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$，若 $a_1+b_1<a_2+b_2$，设 $a_1+b_1=c$，则 $a_2+b_2 \geqslant c+1$。这时，

$$\varphi(a_1, b_1) = c(c+1)/2+b_1<c(c+1)/2+c,$$

$$\varphi(a_2,b_2) \geqslant (c+1)(c+2)/2+b_2>c(c+1)/2+c+1,$$

故

$$\varphi(a_1,b_1)<\varphi(a_2,b_2)。$$

若 $a_1+b_1=a_2+b_2, b_1<b_2$，则 $\varphi(a_2,b_2)-\varphi(a_1,b_1)=b_2-b_1>0$，故

$$\varphi(a_1,b_1)<\varphi(a_2,b_2)。$$

即当 $(a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ 时，$\varphi(a_1,b_1) \neq \varphi(a_2,b_2)$。

即 φ 是 $N \times N$ 到 N 的单射，亦即 φ 是 $N \times N$ 到 N 的子集上的双射。因 N 是可列集，故由定理 3，$N \times N$ 是可列集。

定理 5 的证明：用数学归纳法证明。

当 $n=1$ 时本定理显然成立。假设本定理当 m 时成立，往证当 $m+1$ 时本定理也成立。即往证

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{m+1}$$

为可列集。

实际上，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{m+1} = \{(a_1, a_2, \cdots, a_{m+1})\}$。令 $\varphi: \prod_{n=1}^{m+1} A_n \longrightarrow \prod_{n=1}^{m} A_n \times A_{m+1}$ 为

$$\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}) = ((a_1, a_2, \cdots, a_m), a_{m+1})，$$ 则 φ

为双射。

由归纳假定 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_m$ 为可列集，A_{m+1} 也是可列集，由引理$(A_1\times A_2\times\cdots\times A_m)\times A_{m+1}$是可列集。故 $\prod_{n=1}^{m+1}A_n$ 是可列集。

推论 1： n维 *Euclid* 空间中有理点（即坐标全为有理数）的集是可列集。

推论 2： $\{(n_1,\cdots,n_K):n_i$ 为自然数，$K=1,2,\cdots\}$ 是可列集。

习　　题

1．试证有限小数的全体是可列集。

2．若M为无限集，A为可列集，则 $M\cup A\sim M$。

3．试证直线上互不相交的开区间所做成的集是至多可列集。

4．单调函数的不连续点集是至多可列集。

5．试证自然数集 N 的所有有限子集的集是可列集。

6．A 为无限集$\Longleftrightarrow$有 A的真子集与A等势。

7．任一无限集M必含有可数子集D，使 $M-D$ 是无限集。

8．设 $f(x)$，$g(x)$是点集E上的实值函数，$\{r_n\}$为全体有理数排成的序列，试证：

$$\{x:f(x)>g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\{x:f(x)>r_n\}\cap\{x:g(x)<r_n\}].$$

9．证明集合 A是无限集的要充条件是对于A到A的每个映射f有A的非空子集B，使$B\neq A$且$f(B)\subset B$。

10．设 f 具有如下的特征：

对于每一个 x_0，有正数 δx_0，当$|x-x_0|<\delta x_0$时，$f(x)\geq f(x_0)$，则$f(x)$的函数值全体至多是可列集。

§4. 连续集(continuous set)

无限集不一定是可列集，现在举一个重要的例子。

定理 1：单位区间$[0,1]$不是可列集。

证明：显然$[0,1]$不是有限集。若$[0,1]$是可列集，则由§3定理2，有

$$[0,1]=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}。$$

在 $[0,1]$ 中取闭区间 I_1，使$|I_1|<\frac{1}{2}$，$a_1\notin I_1$，在 I_1 的内部再取闭区间 I_2，使$|I_2|<\frac{1}{2^2}$，$a_2\notin I_2$。如此继续做下去。若已取得 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 满足

$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n$

I_k 为闭区间

I_k 的长度 $|I_k|<\frac{1}{2^k}$

$a_k\notin I_k$

其中 $k=1,2,\cdots,n$，再取 $I_{n+1}\subset I_n$，使 I_{n+1} 为闭区间，其区间长$|I_{n+1}|<\frac{1}{2^{n+1}}$，且 $a_{n+1}\notin I_{n+1}$。于是得到闭区间列

$$I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$$

满足

$I_n\supset I_{n+1}$

$a_n\notin I_n$

$|I_n|<\frac{1}{2^n}$

其中 $n=1,2,\cdots$，因$\frac{1}{2^n}\to 0$，根据区间套定理，必有 b 属于所有的区间 I_n。

因 $I_1\subset[0,1]$，故 $b\in[0,1]$。因

$$[0,1]=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

故有m，使$b=a_m$。由I_n的取法知$a_m\notin I_m$，与b属于所有的I_n矛盾。故$[0,1]$不能是可列集。

定义 1：凡与$[0,1]$等势的集称为**连续集**（*continuous set*）。它的基数称为**连续基数**，记作c。

定理 2：闭区间$[a,b]$，开区间(a,b)以及半开区间$(a,b]$或$[a,b)$的基数都是c。

证明：设$A=[a,b]$，$I=[0,1]$，由

$$y=a+(b-a)x$$

构成I到A上的双射。因I是连续集，故A也是连续集。

由§3 定理3的推论3，无限集去掉有限集时基数不变，由A的基数是c可知(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$的基数都是c。

推论：实数集的基数是c。

参见§1例2。

定理 3：两两不相交的至多可列个基数为c的集合的并集，它的基数也是c。

证明：就可列个情况讨论之。设$\{E_k\}$为两两不相交的可列个基数为c为集列，设

$$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

于半开区间$[0,1)$中，取一列单调增加的数列$\{c_n\}$，

$$c_0=0<c_1<c_2<\cdots,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}c_n=1,$$

则

$$\{[c_{k-1},c_k)\}\quad k=1,2,\cdots$$

也构成两两不相交的可列个基数为c的集列。对于任意n，

有

$$E_n \sim [c_{n-1}, c_n)。$$

根据§1定理4，有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_{k-1}, c_k),$$

即

$$S \sim [0,1),$$

故S的基数是c。

推论 1：至多可列个基数为c的集的并集，它的基数是c。

二进小数表示法对于进一步讨论连续集是很有用的，为此先介绍二进小数表示法。

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k = 0, 1$$

的和称为二进小数(*binary number*)，简写此和为

$$0.a_1a_2\cdots,$$

它表示[0,1)的数。反之，[0,1)的任何数x皆可用二进小数

$$x = 0.a_1a_2\cdots$$

表示之。如

$$\frac{3}{8} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.011$$

$$\frac{7}{15} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{0}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots$$

$$= 0.01110111\cdots$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \cdots$$

$=0.1010\cdots$

在[0,1)中若 x 不是形如 $\frac{m}{2^n}$ $(m=1,3,\cdots,2^n-1)$ 的分数，则表示法是唯一的。而形如 $\frac{m}{2^n}$ $(m=1,3,\cdots,2^n-1)$ 的数有两种表示法，如

$$\frac{5}{8}=0.101000\cdots$$
$$=0.100111\cdots$$

我们限定有两种表示法的数仅用前一种写法表示之。即从某个数码后全是1的数写为全是0的形式。如此，[0,1)的每个数都可用二进小数表示出来，而且这种表示法是唯一的。这种表示法的特点是任何位后必都有零。

应用二进小数可以证明下述定理：

定理 4： 自然数序列的全体 Q 是一个连续集。

证明： 将[0, 1)的数用规定的二进小数表示法表示出来。对每个 $x\in[0,1)$，在表示法

$$x=0.a_1a_2\cdots$$

中，取数码为0的那些下标，由规定的表示法，对任何 n，都有 $k>n$，使 $a_k=0$。故有单调增加的自然数列

$$k_1<k_2<\cdots<k_n\cdots$$

使 $a_{k_i}=0$，此外的 $a_k=1$。这种数列的集合以 H 表示之。显然，每个这种序列唯一的确定一个二进小数，反之，每一个二进小数也唯一确定一个这样的序列。故 H 与[0,1)是等势的，而 H 的基数是 c。

对应单调增加的自然数列 $(k_n)_{n\in N}$，作数列 $(m_n)_{n\in N}$，满足

$$m_1=k_1,\quad m_n=k_n-k_{n-1},\ n=2,3,\cdots$$

这个对应$(k_n)_{n\in N}\to(m_n)_{n\in N}$是 H到 Q 上的双射。故

$$H\sim Q,$$

而Q的基数是 c。

定理 5：设 A_1，A_2，…，A_n 都是基数为 c 的集合，则直积

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$

的基数也是 c。

证明：以 $n=3$ 为例证明这个定理。
设 Q 为自然数序列的全体，由定理 4 知 Q 的基数是 c。因

$$A_1\sim Q,\ A_2\sim Q,\ A_3\sim Q,$$

故分别有双射存在，设

$$f_1:\ A_1\to Q$$

$$f_2:\ A_2\to Q$$

$$f_3:\ A_3\to Q$$

分别为其双射。则对于 $A_1\times A_2\times A_3$ 的任一元素 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，有

$$f_1(a_1)=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$$

$$f_2(a_2)=(p_1,p_2,p_3,\cdots)$$

$$f_3(a_3)=(q_1,q_2,q_3,\cdots)$$

作映射

$$f:A_1\times A_2\times A_3\to Q$$

为

$$f((a_1,a_2,a_3))=(n_1,p_1,q_1,n_2,p_2,q_2,\cdots),$$

则f是双射，从而 $A_1\times A_2\times A_3\sim Q$，因 Q 的基数为c，故 $A_1\times A_2\times A_3$的基数也是 c。

这个证明方法对任何自然数 n 都是适用的，故任意有限个基数为 c 的集合的直积，它的基数仍为 c。

推论 1：n维 $Euclid$ 空间的点集的基数是 c。

推论 2：设 D 为连续集，对任一$\alpha \in D$, A_α 为连续集，则 $\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$仍为连续集。

实际上，因每个被加集与平面上平行于 x 轴的直线等势，故 c 个连续集的并集与平面上点集等势，它的基数为 c。

定理 6：可列个基数为 c 的集合的直积，其基数仍为 c。

证明：设 $\varphi_i: A_i \to Q (i \subset N)$为双射，对于 $A = \prod\limits_{i \in N} A_i$ 的任一元素

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$$

令

$$\varphi_i(a_i) = (n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \cdots, n_m^{(i)}, \cdots), i \in N,$$

作

$$\varphi: A = \prod_{i \in N} A_i \to Q$$

为

$$\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_1^{(2)}, n_3^{(1)}, n_2^{(2)}, n_1^{(3)}, n_4^{(1)}, \cdots)。$$

这个数列的作法仿照§3定理 4 。则 φ是A到 Q 的双射，故A的基数是 c。

习　　题

1．试证(0, 1)上无理数集是连续集。

2．直线上全体区间构成的集族其基数为 c。

3．设 $A = B + C$, $\overline{\overline{A}} = C$，则 B 与 C 之中最少有一个基数为c。

4. 由 0 及 1 构成的序列的集合，其基数为 c。

5. 试证可列个可列集的直积集的基数为 c。

6. 若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\overline{\overline{A}}=c$，则最少有一个 A_n 的基数为 c。

§5. 不同基数的存在

由§4定理 1 知 $c>a$，但连续集的基数是否是最大的？不是的。

定理 1：设 F 为[0,1]上一切实函数集，则 F 的基数大于 c。

证明：设 $I=[0,1]$，先用反证法证明 F 不等势于 I。如果 $I\sim F$，则有双射 $\varphi: I\to F$，对于 $t\in I$，有

$$\varphi(t)=f_t(x)\in F。$$

$f_t(x)$ 为在 $0\leqslant t\leqslant 1$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 中定义的函数。作函数

$$\psi(x)=f_x(x)+1,$$

这是 F 的元素，所以 I 中必有 t，适合

$$\psi(x)=f_t(x)$$

即

$$f_x(x)+1=f_t(x)。$$

当 $x=t$ 时，这个等式并不成立，故 $I\sim F$ 不成立。

作 F 的子集

$$F'=\{\sin x+y\},(0\leqslant y\leqslant 1),$$

令 $\varphi: I\to F'$ 为 $\varphi(y)=\sin x+y$，则 φ 为 I 到 F' 上的双射。故 $I\sim F'$。

总之 F 的基数大于 I 的基数 c。

定义 1：[0,1]上一切实函数的集合，其基数为 f。

定理 1 指出 $c<f$，然则是否有大于 f 的基数？实际上

对于任何基数 β，都可以做出一个集合，其基数大于所设的基数 β。

定理 2：设M是一个集合，T 是 M 的一切子集所成的集合，则

$$\overline{\overline{T}} > \overline{\overline{M}}。$$

证明：设 $T' = \{\{a\} : a \subset M\}$，则 $\varphi(a) = \{a\}$ 为$\varphi : M \to T'$的双射，故$M \sim T' (\subset T)$，而$\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{T}}$。

其次证明 $T \sim M$ 不成立。设 ψ：$M \to T$ 为双射，将 M 的元素分为两类：

$$A = \{m : m \in \psi(m)\}$$

$$B = \{m : m \notin \psi(m)\}$$

则 $A \cap B = \phi$，$A \cup B = M$。因 $M \in T$，故 $\psi(m) = M$的 m 必属于 A。又因 $\phi \in T$，$\psi(m) = \phi$ 的m必属于B，故 A，B 皆非空集。由做法可知

$$B \subset T。$$

必有 m_0，使 $\psi(m_0) = B$，若 $m_0 \in A$，则

$$m_0 \in \psi(m_0) = B$$

与 B 的做法矛盾。若 $m_0 \notin A$，则 $m_0 \in B$，由B 的做法

$$m_0 \notin \psi(m_0) = B$$

也矛盾。这个 m_0 既不属于 A 也不属于 B 是矛盾的。故 $M \sim T$ 不能成立。即

$$\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{T}},$$

故有

$$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{T}}。$$

定理 3：设M为n元素集，T 为其一切子集所成的集，则

$\overline{\overline{M}} = n$，$\overline{\overline{T}} = 2^n$。

证明：因 T 含有一个空集 ϕ，C_n^1个单元素集，C_n^2个二元素集，…，C_n^n个n元素集。故T 的元素个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n。$$

这个结果当 $n = 0$ 或 1 时也成立。当 $n = 0$ 时，表示 M 为空集，T 只含一个元素即 ϕ 本身。当 $n = 1$ 时，$M = \{a\}$，T恰含有二个子集即 ϕ 及 $\{a\}$。由这个结果可以给出

定义 2：若M的基数为 α，则 M 的一切子集所成的集 T 的基数 β 定义为

$$\beta = 2^{\alpha}。$$

定理 3 指出了 $2^{\alpha} > \alpha$。

定理4：$c = 2^a$。

证明：设 N 为自然数集，A 为 N 的一切子集的集，由定义有

$$\overline{\overline{A}} = 2^a。$$

另方面，对于 N 的每个子集 N'，对应于一个由0，1 组成的序列。即令N'的元素对应 1，非 N'的元素对应 0，如

偶数集$\longrightarrow (0, 1, 0, 1, \cdots)$

$\{3, 5\} \longrightarrow (0, 0, 1, 0, 1, 0\cdots)$

质数集$\longrightarrow (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$

设由 0，1 组成的一切序列的集为T，则

$$A \sim T。$$

在 T 中，由某个数后全是 1 的序列的全体用 T' 表示之，则 $T' \subset T$，且 $T \setminus T'$ 和二进小数集等势。即

$$\overline{\overline{(T \setminus T')}} = \overline{\overline{[0, 1)}} = c$$

T'的元素恰对应于形如$\frac{m}{2^n}$的二进小数，而 $\{\frac{m}{2^n}$：$m = 1, 3, \cdots, 2^n - 1, \cdots\}$是可列集，故

$\overline{\overline{T'}} = a$。

因$T = T\setminus T' + T'$，$\overline{\overline{T\setminus T'}} = c$，$\overline{\overline{T'}} = a$，故 $\overline{\overline{T}} = c$。又因$A \sim T$，故$\overline{\overline{A}} = c$。

总之有 $\overline{\overline{A}} = c = 2^a$。

我们已经看到，对于任意基数 α，都有$2^\alpha > \alpha$，是否有基数 β 满足

$$\alpha < \beta < 2^\alpha?$$

特别的，当 $\alpha = a$ 时，是否有 β 满足

$$a < \beta < c?$$

这个问题 Cantor 曾提出连续统假说，他猜想这种 β 是不存在的。对于一般的基数 α，称为一般连续统假说(*generalized continuous hypothesis*)。自从 Cantor 提出连续统假说以来，其真伪长年成为悬案，Cantor 本人晚年也曾努力谋求解决，一直未果。最后由 Gödel (1940) 及P. J. Cohen (1963)明确了连续统假说、一般连续统假说与其它集论公理是独立的。

定理 5：设C为$[0, 1]$上一切连续函数的集，则

$$\overline{\overline{C}} = c。$$

证明：设$C' = \{\sin x + k\}$ (k为实数)，则$C' \subset C$，且$\overline{\overline{C'}} = c$。因此

$$\overline{\overline{C}} \geq c。$$

设H为实数序列的集，即

$$H = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots) : u_i\text{为实数}\},$$

由§4定理 6，

$$\overline{\overline{H}} = c。$$

将$[0, 1]$中所有有理数排列为

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$$

因有理数集是可列集，故这样排列是可能的。对每个 $f\in C$，有实数列

$$a_f=(f(r_1),\ f(r_2),\ \cdots,\ f(r_n),\ \cdots)$$

令 $\varphi(f)=a_f$，当 $f(x)\neq g(x)$ 时，必有 $\varphi(f)\neq\varphi(g)$，否则，若 $\varphi(f)=\varphi(g)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在有理数上的值全相同。由于函数的连续性，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在[0，1]的任何点上的值必皆相同，即 $f(x)=g(x)$。

设 $H'=\{a_f\}$，则 φ 是 C 到 H' 上的双射，故有 $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{H'}}$。因 $H'\subset H$，而 $\overline{\overline{H}}=c$，故

$$\overline{\overline{C}}\leqslant c。$$

总之，有

$$\overline{\overline{C}}=c。$$

习　　题

1. 设 $A\neq\phi$，$\overline{\overline{B}}>1$，$B^A=\{f:(f:A\to B)\}$，则 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B^A}}$。
2. 试证明 $f=2^c$。

§ 6. 基数的运算(operation of cardinal number)

设 A 与 B 为两个无公共元的有限集，若 A 的元素有 n 个，B 的元素有 m 个，则 $A\cup B$ 的元素有 $n+m$ 个。有限集的元素个数的概念可推广为无限集基数的概念。故关于基数的运算可以按数的运算来考虑。

因为当 $A_1\sim B_1$，$A_2\sim B_2$，$A_1\cap A_2=\phi$，$B_1\cap B_2=\phi$ 时，必有 $A_1\cup A_2\sim B_1\cup B_2$，故可以定义基数的加法如下：

取集 A_1、A_2，使 $A_1 \cap A_2 = \phi$，$\overline{\overline{A}}_1 = \alpha_1$、$\overline{\overline{A}}_2 = \alpha_2$。

定义 1：$A = A_1 \cup A_2$ 的基数 α 称为 α_1 与 α_2 的和，记作

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2。$$

类似的可以定义任意有限个基数的和，一般为了定义任意多个基数的和，对于基数集

$$\{\alpha_\lambda : \lambda \in L\}$$

取集族 $\{A_\lambda : \lambda \in L\}$，使

（1） 集族 $\{A_\lambda : \lambda \in L\}$ 为互不相交的集族，

（2） $\overline{\overline{A}}_\lambda = \alpha_\lambda$，

作集 $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$。

定义 2：A 的基数 α 称为基数集 $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L\}$ 的和，记作

$$\alpha = \sum_{\lambda \in L} \alpha_\lambda .$$

基数的加法与有限个自然数的加法不同，自然数的和大于每个被加数，而基数相加并不如此。如有限集与可列集的并集为可列集，故有

$$n + a = a。$$

由§3定理 4 知可列个可列集的并集是可列集，故有

$$a + a + \cdots = a。$$

由 §4定理 3 知可列个基数为c的集的并集基数为c，故有

$$c + c + \cdots = c。$$

定理 1：基数的加法满足

（1） 交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$，

（2） 结合律：$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$。

实际上，由第一章§3定理 1，集的并的运算满足交换律和结合律，故基数的加法也满足交换律和结合律。

定理 2：设 β 非有限基数，则

$$\beta + a = \beta_{\circ}$$

证明：由§3定理2，有 $\beta = a + \gamma$，故

$$\beta + a = (\gamma + a) + a = \gamma + (a + a) = \gamma + a = \beta_{\circ}$$

定理 3：对于任意基数 α, β 必有

$$\alpha \leqslant \alpha + \beta,\ \ \beta \leqslant \alpha + \beta_{\circ}$$

证明：取集 A、B，使 $A \cap B = \phi$，$\overline{\overline{A}} = \alpha$，$\overline{\overline{B}} = \beta$，则 $\overline{\overline{A \cup B}} = \alpha + \beta$。由基数的单调性，因 $A \subset A \cup B$、$B \subset A \cup B$，故 $\alpha \leqslant \alpha + \beta$，$\beta \leqslant \alpha + \beta_{\circ}$

这个定理显然对于任意多个基数的和也成立。

定理 4：设 $\{\alpha_i\}$ 为基数集，若其中无最大基数，即对任意 $\alpha_j \in \{\alpha_i\}$，必有 $\alpha_k \in \{\alpha_i\}$，使 $\alpha_j < \alpha_k$，则对于任意 i，必有

$$\alpha_i < \Sigma \cdot$$

证明：根据定理 3 的推广，对于任意 i，必有

$$\alpha_i \leqslant \alpha_{\circ}$$

若有 n_0 使

$$\alpha_{n_0} = \alpha,$$

则 α_{n_0} 为 $\{\alpha_i\}$ 中的最大者，由定理的条件，$\{\alpha_i\}$ 中无最大者，故对于任意 i 都有

$$\alpha_i < \alpha_{\circ}$$

定理 5：设 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in L}$ 为基数集，必有基数 α 满足

$$\alpha_\lambda < \alpha_{\circ}$$

证明：若 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in L}$ 中无最大基数，则由定理 4，$\sum\limits_{\lambda \in L} \alpha_\lambda$ 即满足要求。若有最大基数 α_{λ_0}，则由§5定理 2 有大于 α_{λ_0} 的基数 α，则 α 满足要求。

由此可见，一切基数的集是不可想像的。若 M 为一切

基数的集，由定理 5 知必有比 M 中一切基数都大的基数，而此基数不在 M 中，这与 M 为一切基数的集相矛盾。

设 A 含有 n 个元素，B 含有 m 个元素，则 $A\times B$ 含有 $n\times m$ 个元素。仿此可以定义基数的乘法如下：

定义 3：设 $\overline{\overline{A_1}}=\alpha_1$，$\overline{\overline{A_2}}=\alpha_2$，则 $A=A_1\times A_2$ 的基数 α 称为 α_1 与 α_2 的积，记作

$$\alpha=\alpha_1\cdot\alpha_2。$$

同理可以定义有限个基数的乘积。一般的，为了定义任意多个基数的积，对于基数集

$\{\alpha_\lambda:\lambda\in L\}$ 取集族 $\{A_\lambda:\lambda\in L\}$，使 $\overline{\overline{A_\lambda}}=\alpha_\lambda$，令 $A=\prod\limits_{\lambda\in L}A_\lambda$。

定义 4：A 的基数 α 称为 $\{\alpha_\lambda:\lambda\in L\}$ 的积，记作

$$\alpha=\prod_{\lambda\in L}\alpha_\lambda。$$

和定理 1 同样，有

定理 6：关于基数的乘法，满足

（1） 交换律：$\alpha\beta=\beta\alpha$，

（2） 结合律：$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$，

（3） 分配律：$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$。

由§3定理 5 有

$$a\times a\times\cdots\times a=a。$$

由§4定理 4 有

$$a\times a\times\cdots=c。$$

由§4定理 5 有

$$c\times c\times\cdots\times c=c。$$

由§4定理 6 有

$$c\times c\times\cdots=c。$$

基数的减法和除法是不能进行的，众所周知有限数的减法是有限数加法的逆运算。对于基数来说，由于

$$a+n=a, \quad a+a=a$$

若像有限数的减法那样定义基数减法，则$a-a$可以是任意自然数，也可以为a。它是不确定的。故基数加法的逆运算不存在。同样的，由于

$$n\cdot c=c, \quad a\cdot c=c, \quad c\cdot c=c,$$

c除c的商c/c也可以是任意自然数，也可以是可列基数或连续基数。因而基数乘法的逆运算基数的除法也是不存在的。

关于有限数的乘幂n^m意味着$n\times n\times\cdots\times n$，即$m$个$n$的连乘积。这一概念自然可以推广到基数的运算上。$\alpha^\beta$也可以定义如下：

定义 5：设$\overline{\overline{B}}=\beta$，$\overline{\overline{A}}=\alpha$，对任一$\lambda\in B$，令$A_\lambda=A$，则集

$$P=\prod_{\lambda\in B}A_\lambda$$

的基数定义为α的β次幂，记作

$$\overline{\overline{P}}=\alpha^\beta。$$

根据第二章§5集合乘幂的定义，乘幂的基数可以叙述为：

定义6：设$\overline{\overline{B}}=\beta$，$\overline{\overline{A}}=\alpha$，集

$$F=\{f:(f:B\to A)\}$$

的基数定义为α的β次幂，记作

$$\overline{\overline{F}}=\alpha^\beta。$$

特别的，当$\alpha=2$时，设T为B的一切子集的集，S为B的每个子集对应的特征函数的集，则$T\sim S$。设B到$\{0,1\}$的映射集为G，则S和G是一致的。由定义 6

$$\overline{\overline{G}}=2^\beta$$

可见§5定义 2 中引入的记号T的基数为2^β是合理的。

定理 7：对于任一基数α，恒可做出由α开始的单调递增的基数列。

证明： 任取基数α，做

$$2^{\alpha}=\alpha_1, 2^{\alpha_1}=\alpha_2, \cdots, 2^{\alpha_{n-1}}=\alpha_n, \cdots,$$

则由§5定理 2 有

$$\alpha<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\cdots,$$

再做

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots,$$

由$\{\alpha_n\}$的作法知$\{\alpha_n\}$中无最大者。由§5定理 4 有

$$\alpha_n<\beta,$$

再令

$$2^{\beta}=\beta_1, 2^{\beta_1}=\beta_2, \cdots, 2^{\beta_{n-1}}=\beta_n, \cdots,$$

同理

$$\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_n<\cdots,$$

再令

$$\gamma=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\cdots,$$

则

$$\beta_n<\gamma。$$

如此下去，则得到

$$\alpha<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\beta<\beta_1<\beta_2<\cdots<\gamma<\gamma_1<\gamma_2<\cdots。$$

和定理 1，定理 6 同样可以证明

定理 8： 关于基数的乘幂，下列运算律成立。

（1） $\alpha^{\beta_1}\cdot\alpha^{\beta_2}=\alpha^{\beta_1+\beta_2}$,

（2） $\alpha_1{}^{\beta}\cdot\alpha_2{}^{\beta}=(\alpha_1\cdot\alpha_2)^{\beta}$,

（3） $(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}$。

习　　题

1. 试证$n^c=f$，$(n\geqslant 2)$。

2．试证下列各等式（其中大部分已给出证明，为了完整一并列出）：

(a) $1^a = 1^c = 1$

(b) $n + a = na = a^n = a + a = a \cdot a = a$

(c) $(n+1)^a = a^a = n + c = nc = c^n = a + c = ac$

$$= c^a = c + c = c \cdot c = c$$

(d) $(n+1)^c = a^c = c^c = 2^c = f$

3．证明 $J.König$ 定理：

设 $\{\alpha_\lambda; \lambda \in D\}$，$\{\beta_\lambda; \lambda \in D\}$ 各为基数集，且对任一 $\lambda \in D$ 恒有 $\alpha_\lambda < \beta_\lambda$，则有

$$\sum_{\lambda \in D} \alpha_\lambda < \prod_{\lambda \in D} \beta_\lambda。$$

第四章　序数(Ordinal number)

§1. 序型(order type)

第三章中讨论的基数并不涉及元素的序关系，本章主要着眼于序关系。

定义 1：设$(A, \prec)$, $(B, <)$是两个全序集，若有A到B的双射φ，当$a_1, a_2 \in A$且$a_1 \prec a_2$时，恒有$\varphi(a_1) < \varphi(a_2)$，则称$\varphi$为**相似变换**(*similarity transformation*)。

显然，两个有序集间的相似变换不改变元素间的次序。

定义 2：若全序集A, B间存在相似变换，则称A与B**是相似的**(*similar*)，记作

$$A \simeq B。$$

例 1：开区间(a, b)与$(0, 1)$是相似的。

实际上

$$y = \frac{x-a}{b-a}$$

是(a, b)到$(0, 1)$的相似变换。

开区间(a, b)与实数集也是相似的。

$$y = \operatorname{tg}\frac{(2x-a-b)\pi}{2(b-a)}$$

就是其间的相似变换。

例 2：自然数集和有理数集按大小关系都是全序集，他

们都是可列集但不相似。

实际上，自然数集有最前元素而有理数集没有。

例 3：在第二章§3例 5 中在自然数集上规定了不同的序关系，它们都是全序集，任意二者都是互不相似的。

如(a)，(c)，(e)都有最前元素，而(b)，(d)，(f)都没有；(b)，(e)，(f)都有最后元素，而(a)，(c)，(d)都没有；(a)中除 1 外每个元素都有直前元，而(c)除 1 外 2 也没有直前元；(b)除 1 外每个元素都有后继元，而(f)除 1 外 2 也没有后继元。可见任意二者都不相似。

定理 1： 若$A\simeq B$，则$A\sim B$。

这可由定义直接推得。

反之，等势的二集未必相似，但对有限集来说确是正确的，即

定理 2： 设$(A, \prec)$，$(B, \prec)$为有限的全序集，则

$$A\sim B \Longleftrightarrow A\simeq B。$$

证明： 首先指出有限的全序集必有最前元素。

实际上，设A是有限集，任取A的元素a_1，若a_1不是A的最前元素，则有$a_2\in A$，使$a_2\prec a_1$。若a_2不是A的最前元素，则有$a_3\in A$，使$a_3\prec a_2$，这样的手续只能进行有限次，必可取得最前元素。

若有限的全序集A由n个元素组成，则A的元素必可按它的序排列为

$$a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n$$

的形式。

实际上，取A的最前元素a_1，再在$A-\{a_1\}$中取最前元素a_2，再在$A-\{a_1, a_2\}$中取最前元素a_3，如此继续下去，就可将A排列为

$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \cdots \prec a_n$。

同理，有限的全序集 E 也可排列为

$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_m$。

若 $A \sim B$，则 $n = m$。令 $\varphi: A \to B$ 为

$\varphi(a_i) = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$。

则 φ 为相似变换，从而

$A \simeq B$。

反之，由定理 1 有若 $A \simeq B$，则 $A \sim B$。

对于无限集这个定理不成立。如例 3 中所见到的，在同一集中按不同序就不相似。

定理 3：设 A、B、C 是三个全序集，则

（1） 自反性：$A \simeq A$，

（2） 对称性：若 $A \simeq B$，则 $B \simeq A$，

（3） 可迁性：若 $A \simeq B$，$B \simeq C$，则 $A \simeq C$

成立。

证明：（1）恒等变换是 A 到 A 的相似变换，故 $A \simeq A$。

（2） 若 $A \simeq B$，则有相似变换 $f: A \to B$。因相似变换是双射，故有逆变换 $f^{-1}: B \to A$。且 f^{-1} 也是相似变换，故

$B \simeq A$。

（3） 若 $A \simeq B$，$B \simeq C$，则有相似变换 $f: A \to B$ 及 $g: B \to C$。令 $h = g \cdot f$，则 h 为 A 到 C 的相似变换。

实际上，由第二章§5定理4，h 是双射。若 $a_1, a_2 \in A$，$a_1 \prec a_2$，则因 f 是相似变换，故有

$f(a_1) < f(a_2)$。

又因 g 是相似变换，故有

$g(f(a_1)) < g(f(a_2))$。

即

$$h(a_1) < h(a_2)。$$

从而 h 是相似变换，故 $A \sim C$。

这个定理指出相似关系是等价关系。

定义 3：按相似的等价关系将所有全序集分类，一切与 A 相似的集归为一类，以记号 $\widetilde{A}$ 表示这类的特征，称为 A 的**序型**(*order types*)。

序型的概念就是彼此相似的全序集类概念的抽象，恰如基数的概念就是彼此等势集类概念的抽象。基数的概念是数量概念，序型的概念是次序概念。n 元素集的基数为 n, n 元素全序集的序型也记为 n。由定理 2，同一记号表示双重意义是不会发生任何不便之处的。

自然数集按自然次序是全序集，它的序型以 ω 表示之，即 $\widetilde{N} = \omega$

自然数集按相反的次序也是全序集，常以 ω^* 表示它的序型，即 $\widetilde{N}^* = \omega^*$。

显然 $\omega \neq \omega^*$，但 $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{N}}^*$，如第二章§3例 5 在自然数集中确定不同的序，它们确定不同的序型。

一般的，全序集 A 按相反次序也构成全序集，记作 A^*。当 A 的序型为 ξ 时，A^* 的序型记为 ξ^*。

整数集 Z 按自然次序

$$\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

是全序集。用 π 表示它的序型，显然有

$$\pi = \pi^*。$$

有理数集 Q 以自然次序为序也是全序集，用 η 表示它的序型，则也有

$$\eta = \eta^*。$$

定理 4：对于任何可列的全序集 A，在以自然次序为序的有理数集Q中有序子集Q_0，使

$$Q_0 \simeq A。$$

证明：因 A 和 Q 都是可列集，故由第三章§3定理 1，它们分别可排列为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

$$Q = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$$

这个排列与序无关。

令$n_1 = 1$，在Q中取元素r_{n_2}，使之满足下述二条件：

（1） r_{n_2}与r_{n_1}的序关系同 a_2与a_1的序关系一致；

（2） n_2是大于n_1且满足条件（1）的最小者。因Q无最前元素及最后元素，故满足（1），（2）二性质的 r_{n_2} 必存在。

因Q的任二元素之间，按大小顺序必有无限多个元素，且 Q 无最前元素及最后元素，故在 Q 中一定有r_{n_3}，满足条件

（1） r_{n_3}与r_{n_1}，r_{n_2}间的序关系，同 a_3与a_1，a_2间的序关系一致；

（2） n_3是大于 n_2且满足（1）的最小者。

如此继续下去，得到Q的元素列

$$r_{n_1}, r_{n_2}, r_{n_3}, \cdots, r_{n_k}, \cdots$$

即为我们所要求的 Q_0。

值得注意的是等势的无限集，其中之一添加有限个或可列个元素，等势的关系依然成立。而互为相似的无限集，其中之一添加一个元素，相似关系就未必再成立。

例如，A为区间$[0, \infty)$，$B = [0, 100] \cup (200, \infty)$，$A$与$B$的序都是自然的大小关系。

作$\varphi: A \to B$为

$$\varphi(x)=x, \qquad \text{当}x\in[0,100]$$
$$\varphi(x)=x+100, \quad \text{当}x\in(100,\infty)$$
则φ为A到B的相似变换。

令 $B'=B\cup\{200\}$，则A与B'不相似。

实际上，若A与B'相似，ψ为其相似变换，设$\psi^{-1}(100)=p$，$\psi^{-1}(200)=q$，则$p<q$。做$\frac{p+q}{2}$，则$\frac{p+q}{2}\in A$，而$\psi\left(\frac{p+q}{2}\right)=r\in B'$，且满足$100<r<200$。但$B'$中在100与200之间没有元素，故$A$与$B'$不能存在相似变换。

基于相似概念的序型概念与基数不同，基数的大小是可以比较的，但不能讨论序型的大小，因此称之为序型而不叫序数。以后我们将就一种特殊的序型，可以比较其大小者而称之为序数。

习　题

1．相似变换保持最前元素及最后元素。

2．相似变换保持序完备性。

3．设A为可列全序集，B为稠密全序集，B无最前元素及最后元素，试证A必相似于B的一个序子集。

4．设A，B都是可列的稠密全序集，且无最前及最后元素，试证$A\simeq B$。

5．设A为无最前及最后元素的稠密全序集，则A必含有η型序子集。

6．设A为无最前及最后元素的可列稠密全序集，则A是η型集。

7．全序集A的一切截段的集$\mathfrak{A}$必与A相似。

8．设A为非空的全序集，则

(a) A无最前元素

(b) A无最后元素

(c) A是稠密的

任何一种情形都有

$$\overline{\overline{A}}\geqslant a。$$

§2. 序型的运算（operation of order type）

序型之间一般虽不能比较其大小，但却可以讨论其间的运算。

设

$$\widetilde{A}=\mu,\quad \widetilde{B}=v,\ A\cap B=\phi,$$

作

$$S=A+B。$$

在S中规定序如下：

（1） 若 $x_1, x_2\in A$，在A中 $x_1<x_2$，则在S中规定$x_1<x_2$；

（2） 若 x_1，$x_2\in B$，在B中 $x_1<x_2$，则在 S 中规定 $x_1<x_2$；

（3） 若 $x_1\in A$，$x_2\in B$，则规定$x_1<x_2$。

则 S 为全序集，即S保持A与B的序且A的元素皆在B的元素之前。

定义 1：对于全序集 A，B，按上述方法作成的全序集S称为A与B的全序和。

定义 2：设 μ，v 为序型，$\widetilde{A}=\mu$，$\widetilde{B}=v$，$A\cap B=\phi$，作全序和$A+B=S$，令 $\widetilde{S}=\xi$，则称ξ为μ与v的和，记作

$$\xi=\mu+v。$$

例 1：设$(A,<)=\{2,3,4,\cdots\}$，$B=\{1\}$，

则

$$(S,<)=(A,<)+B=\{2,3,4,\cdots,1\}$$

即

$$\widetilde{S}=\omega+1。$$

这个$\omega+1$与ω不同，ω无最后元素，而$\omega+1$有最后元素。但

$$B+(A,<)=\{1,2,3,\cdots\}$$

它的序型为ω。由序型加法的定义有

$$1+\omega=\omega$$

故有

$$1+\omega\neq\omega+1$$

即序型加法交换律不成立。同样我们可以看到

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ \omega+n,\cdots$$

各为相异的序型。而

$$1+\omega,2+\omega,\cdots,n+\omega,\cdots$$

的序型都相同，皆为ω。

类似的我们还可以看到

$$\omega^*+1,\omega^*+2,\cdots,\omega^*+n,\cdots$$

的序型皆相同，且等于ω^*。而

$$1+\omega^*,2+\omega^*,\cdots,n+\omega^*,\cdots$$

的序型各不相同。

在第二章§3例5中的序型分别为

(a)　　ω

(b)　　ω^*

(c)　　$\omega+\omega$

(d)　　$\omega^*+\omega$

(e)　　$\omega+\omega^*$

(f)　　$\omega^*+\omega^*$

一般地，可以定义多个序型的加法。

定义 3： 设D是全序集，对每个$\lambda \in D$，有全序集A_λ，且当$\lambda \neq \lambda'$时，$A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \phi$。作并集

$$S = \sum_{\lambda \in D} A_\lambda。$$

在S中规定序：设x, x'为S的任二元素，

若$x \in A_\lambda, x' \in A'_\lambda, \lambda < \lambda'$则规定$x < x'$；

若$x, x' \in A_\lambda$，在A_λ中$x < x'$，则规定$x < x'$；

则 S为全序集。称为$\{A_\lambda : \lambda \in D\}$的全序和。而 S 的序型称为$\{A_\lambda : \lambda \in D\}$的序型的和，记作

$$\widetilde{S} = \sum_{\lambda \in D} \widetilde{A}_\lambda。$$

容易看到：

1. 序型的和仅与序型有关，与A_λ的取法无关。

2. 序型的加法不满足交换律。

3. 对于有限集而言，序型的加法与通常数的加法一致。

定义 4： 在定义 3 中当A_λ的序型皆相等时，设

$$\widetilde{A}_\lambda = v \quad (\lambda \in D), \ \widetilde{D} = \mu,$$

则

$$S = \sum_{\lambda \in D} A_\lambda$$

的序型可用

$$v \cdot \mu$$

表示之，称为序型 μ 与序型 v 按此顺序的乘积。

例 1： 设$A_1 = \{1, 4, 7, \cdots\}$

$$A_2 = \{2, 5, 8, \cdots\}$$

$$A_3 = \{3, 6, 9, \cdots\}$$

则

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_3 = \omega$$

于是全序和

$$S = \{1, 4, 7, \cdots, 2, 5, 8, \cdots, 3, 6, 9, \cdots\}$$

的序型为

$$w + w + w。$$

也可写做

$$w \cdot 3。$$

例 2：设$A_i = \{a_i, b_i, c_i\}, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$，则 $\widetilde{D} = w$，$\widetilde{A}_i = 3$，

其全序和为

$$S = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \cdots, a_n, b_n, c_n, \cdots\},$$

S的序型为

$$3 + 3 + 3 + \cdots$$

或

$$3 \cdot w$$

因

$$3 + 3 + 3 + \cdots = 3 \cdot w = w$$

而

$$w + w + w \neq w$$

故

$$3 \cdot w \neq w \cdot 3。$$

例 3 设

$$A_1 = \{\frac{n}{n+1} : n \in N\}$$

$$A_2 = \{1 + \frac{n}{n+1} : n \in N\}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$A_{m+1} = \{m + \frac{n}{n+1} : n \in N\}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

则$\{A_m\}_{m\in N}$的全序和$S=\sum\limits_{m\in N}A_m$为

$$S=\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots,\frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\cdots,\frac{2n+1}{n+1},$$

$$\cdots,\ m+\frac{1}{2},\ m+\frac{2}{3},\cdots,m+\frac{n}{n+1},\cdots\}。$$

S 的序型为

$$\omega+\omega+\cdots\quad=\omega\cdot\omega,$$

可写做

$$\omega^2。$$

关于序型的乘法和乘幂可以用另一种形式叙述，尤其多个序型的乘法以下述定义更为方便。

定义 5：设μ,v为二序型，取二集 A,B，使 $\widetilde{A}=\mu$，$\widetilde{B}=v$。在$A\times B$中引入字典序。即对于任意二元（a，b），（a_1，b_1）当且仅当 $a<a_1$，或$a=a_1,b<b_1$时规定为$(a,b)\prec(a_1,b_1)$，则$A\times B$为全序集，称具有此序的集 $A\times B$ 为A与B的全序积。$A\times B$的序型λ称为μ与v的积，记作

$$\lambda=v\cdot\mu。$$

容易看出定义 4 与定义 5 是等价的。定义 5 中的A相当于定义 4 中的指标全序集。而定义 5 中的B相当于定义 4 中的因子全序集。

由乘法定义容易看出

定理 1：若$A\simeq A_1$，$B\simeq B_1$，则$A\times B\simeq A_1\times B_1$。

$A\times B$与$B\times A$虽然等势但未必相似是显然的。从上述诸例也都可以看出，再看下例：

例：设$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\{a,b,c\}$，则

$\widetilde{A}=\omega$，$\widetilde{B}=3$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), \cdots\cdots (n, a), (n, b), (n, c), \cdots\}$$

而

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), \cdots (a, n), \cdots, (b, 1), (b, 2), \cdots, (b, n), \cdots, (c, 1), (c, 2), \cdots, (c, n), \cdots\}$$

$$\widetilde{A \times B} = 3 \cdot w = w$$

$$\widetilde{B \times A} = w \cdot 3 = w + w + w,$$

故

$$\widetilde{A \times B} \neq \widetilde{B \times A}。$$

定理 2：关于序型的加法和乘法的左侧分配律成立。即

$$\lambda(\mu + v) = \lambda\mu + \lambda v$$

一般地，有

$$v(\sum_m \mu_m) = \sum_m v \cdot \mu_m$$

成立。

证明： 设μ_m，v各为全序集A_m、B的序型，其中当$m \neq n$时，$A_m \cap A_n = \phi$，则

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots) \times B = (A_1 \times B) + (A_2 \times B) + \cdots$$

是全序和。因

$$\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \widetilde{A}_3 + \cdots = \widetilde{\sum_m A_m},$$

故左端的序型为

$$v(\sum_{m \in N} \mu_m),$$

而右端的序型为

$$v \cdot \mu_1 + v \cdot \mu_2 + \cdots + v \cdot \mu_m + \cdots = \sum_m v \cdot \mu_m,$$

故

$$v(\sum_m \mu_m) = \sum_m v \cdot \mu_m。$$

例 设 $A_1=\{a_1, a_2, \cdots\}$, $A_2=\{c\}$, $B=\{b_1, b_2\}$,

则

$$(A_1+A_2)\times B=\{a_1, a_2, \cdots, c\}\times\{b_1, b_2\}$$
$$=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (c, b_1), (c, b_2)\},$$

$$A_1\times B=\{a_1, a_2, \cdots\}\times\{b_1, b_2\}=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \cdots\}$$

$$A_2\times B=\{c\}\times\{b_1, b_2\}=\{(c, b_1), (c, b_2)\}$$

可见(A_1+A_2, B)与$(A_1, B)+(A_2, B)$不仅元素相同而且序关系也一样，故它们的序型相等。但(B, A_1+A_2)与$(B, A_1)+(B, A_2)$却未必相等。

实际上，

$$B\times(A_1+A_2)=\{b_1, b_2\}\times\{a_1, a_2, \cdots, c\}$$
$$=\{(b_1, a_1), (b_1, a_2)\cdots, (b_1, c), (b_2, a_1), (b_2, a_2), \cdots, (b_2, c)\}$$

$$B\times A_1=\{b_1, b_2\}\times\{a_1, a_2, \cdots\}$$
$$=\{(b_1, a_1), (b_1, a_2), \cdots, (b_2, a_1), (b_2, a_2), \cdots\}$$

$$B\times A_2=\{b_1, b_2\}\times\{c\}$$
$$=\{(b_1, c), (b_2, c)\}$$

$$(B\times A_1)+(B\times A_2)=\{(b_1, a_1)(b_1, a_2), \cdots, (b_2, a_1), (b_2, a_2), \cdots(b_1, c), (b_2, c)\}$$

$B\times(A_1+A_2)$与$(B\times A_1)+(B\times A_2)$的元素虽然相同但序不一样，以致

$$\overline{\overline{B\times(A_1+A_2)}}=\omega+\omega+1,$$
$$\overline{\overline{(B\times A_1)+(B\times A_2)}}=\omega+\omega+2,$$

故右侧分配律不成立。

关于三个序型的乘法可以定义如下：

定义 6：设$\widetilde{A}=\mu$, $\widetilde{B}=v$, $\widetilde{C}=\lambda$，在集$A\times B\times C$中引入序关系如下：

设(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)为$A\times B\times C$的任二元素，当且仅当

$x_1<x_2$

或 $x_1=x_2$, $y_1<y_2$

或 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1<z_2$

时规定$(x_1, y_1, z_1)<(x_2, y_2, z_2)$。则$A\times B\times C$是全序集。称之为$A$, B, C的全序积。$A\times B\times C$的序型ξ称为μ, v, λ的积（product），以

$$\xi=\lambda\cdot v\cdot\mu$$

表示之。

由乘法定义立即推得

定理 3：序型乘法结合律成立。即

$$\mu_1(\mu_2\cdot\mu_3)=(\mu_1\cdot\mu_2)\mu_3=\mu_1\mu_2\mu_3。$$

类似可以定义有限个以至可列个序型的乘积。

习　　题

1. 试证：$\omega+\omega^2\neq\omega^2+\omega$
2. 试证：$(\omega+\omega)\omega=\omega(\omega+\omega)$
3. 试证：$n\cdot\omega=\omega\cdot n$
4. 试证：$n+\omega+\omega=\omega+\omega$
5. $\omega^*+\omega=\pi$，但$\omega+\omega^*\neq\omega^*+\omega$。
6. 序型运算加法满足结合律。
7. $(\mu+v)^*=v^*+\mu^*$
8. 试证：$1+\omega+\omega^2+\omega^3=\omega^3$

§3. 良序集(well-ordered set)

定义 1：若全序集 A 的任一非空序子集必有最前元素，则称 A 为良序集(*well-ordered set*)。

例 1：凡有限的全序集是良序集。

实际上，在§1定理 2 的证明中曾指出有限的全序集必有最前元素，而有限集的非空子集必为有限集，故有限的全序集是良序集。

例 2：$N=\{1,2,3,\cdots\}$ 是良序集。

实际上，设 N' 为 N 的非空子集，在 N' 中任取元素 n，如果 n 不是 N' 的最前元素，取 n 在 N 中确定的截段 N_n，则 $N'\cap N_n$ 为非空有限集。由例 1，它必有最前元素。这个最前元素就是 N' 的最前元素。故 N 是良序集。

例 3：$M=\{1,3,5,\cdots,2,4,6,\cdots\}$ 是良序集。

实际上，设 M' 为 M 的非空子集，M_2 表示 2 在 M 中确定的截段，若 $M'\cap M_2\neq\phi$，则 $M'\cap M_2$ 的最前元素就是 M' 的最前元素。和例 2 的讨论方法一样，$M'\cap M_2$ 必有最前元素。

若 $M'\cap M_2=\phi$，则由 M' 不空，必有 $m\in M'$。若 m 不是 M' 的最前元素，则 $M'\cap M_m$ 的最前元素就是 M' 的最前元素。这时，有

$$M'\cap M_m=M'\cap(M_m\setminus M_2)\neq\phi,$$

而

$$M'\cap(M_m\setminus M_2)$$

是有限集。它必有最前元素，它的最前元素就是 M' 的最前元素。故 M' 必有最前元素而 M 是良序集。

例 4：全序集

$$\{\cdots, 4, 3, 2, 1\}$$

不是良序集。

实际上，它本身就没有最前元素。

例 5：整数集、有理数集等按通常的大小关系都是全序集，但都不是良序集。

由定义直接推得下述定理：

定理 1：良序集的子集仍是良序集。

定理 2：若A为良序集，且$B \sim A$，则B也是良序集。

证明：设$\varphi: B \to A$是相似变换，B的任意非空子集B'，在φ下B'的象是A的非空子集A'。因A是良序集，故A'有最前元素a'，$\varphi^{-1}(a')$就是B'的最前元素。B的任意非空子集都有最前元素，故B是良序集。

定理 3：良序集除了最后元素外，每个元素都有后继元。

证明：设A为良序集，任取$a \in A$，a不是A的最后元素，取a在A的截段A_a，作$A_a \cup \{a\}$，则$A \setminus (A_a \cup \{a\})$是$A$的非空子集。它的最前元素就是$a$的后继元。

定理 4：良序集中不存在无限单调减少元素列

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots。$$

证明：若存在这样的元素列，则集$\{a_n\}$是良序集的子集而无最前元素，是矛盾的。

定理 5：设A'是良序集A的子集，则A到A'的相似变换φ对任意a必有$\varphi(a) \geqslant a$。

证明：否则，有相似变换$\varphi: A \to A'$及$a \in A$使$\varphi(a) < a$。设M为A中具有此性质的元素全体，则$M \neq \phi$，故M必有最前元素a_0，设

$$\varphi(a_0)=a_0',$$

则

$$a_0'<a_0。$$

因 $a_0'\in A$，设 $\varphi(a_0')=a_1'$，因相似变换是保序的，故在 A' 中有

$$a_1'<a_0'$$

则 $a_0'\in M$，这与 M 的最前元素为 a_0 矛盾，故必须有

$$\varphi(a)\geqslant a。$$

推论 1：良序集不能与其任一截段相似，也不能与其任一截段的子集相似。

实际上，设 A 为良序集，A_a 为由 a 确定的截段，若 $A\simeq A_a$ 或 $A\sim B\subset A_a$，则必有 $\varphi(a)<a$，这是不可能的。

推论 2：良序集的任何两个不同的截段不能相似。

推论 3：良序集不能与其子集的一个截段相似。

定理 6：二良序集若相似，则相似变换是唯一的。

证明：设 φ,ψ 都是良序集 A 到 B 的相似变换，若 $\varphi\neq\psi$，则必有 $a_0\in A$，使

$$\varphi(a_0)\neq\psi(a_0)。$$

设 $b=\varphi(a_0)$，$b'=\psi(a_0)$，则 A_{a_0} 与 B 的两个截段 B_b，$B_{b'}$ 都相似，于是 $B_b\simeq B_{b'}$，与定理 5 推论 2 矛盾，故 $\varphi=\psi$。

下述定理是良序集的基本定理：

定理 7：任何二良序集，或为相似，或为其中之一相似于另一集的截段。

证明：设 A 和 B 是两个良序集，对于 A 的元素 a，若 A_a 与 B 的某个截段 B_b 相似，称 a 为 A 的就范元素。例如 A 的最前元素就是 A 的就范元素。

若 a 是 A 的就范元素，则任一 $a'<a$ 也是 A 的就范元素。

因为若 A_a 与 B_b 相似，则

$$A_{a'} = (A_a)_{a'}$$

必与 B_b 的某截段相似。于是 $A_{a'}$ 与 B 的某截段相似。

设 M 为 A 的一切就范元素的集，则

$$M = A,$$

或者有某元素 a，使

$$M = A_a。$$

实际上，若 $M \neq A$，则 $A \setminus M$ 不是空集，其中有最前元素 a。

若 $a' \in M$，则 $a' \neq a$ 且 $a' < a$。否则，若 $a < a'$，则 a 亦为就范元素，但 a 是 $A \setminus M$ 的最前元素，这是不可能的，故 $a' \neq a$ 且 $a' < a$，即 $a' \in A_a$。故有

$$M \subset A_a。$$

另一方面，若 $a' \in A_a$，则 $a' < a$，a' 不属于 $A \setminus M$，故 $a' \in M$，即

$$A_a \subset M。$$

故必有

$$M = A_a。$$

同样对于 B 中元素 b，如果 B_b 与 A 的某个截段 A_a 相似，称 b 为 B 的就范元素，设 B 中就范元素的全体为 N，同理可得 $N = B$ 或 $N = B_b$。

其次证明

$$M \simeq N。$$

对于 $a \in M$，则有 $b \in N$，使

$$A_a \simeq B_b。$$

由定理 5 的推论 2 可知这个 b 是唯一的；反之，对于 $b \in N$，亦有且仅有一个 $a \in M$，使

$$B_b \simeq A_a。$$

故 a 与 b 的对应φ是M到N上的双射。

设 a_1, a_2 为M的任二元素，$\varphi(a_1)=b_1$，$\varphi(a_2)=b_2$。若$a_1<a_2$，则由$A_{a_2}\simeq B_{b_2}$，$A_{a_1}=(A_{a_2})_{a_1}$ 的对应部分设为$(B_{b_2})_{b_0}$，则$(B_{b_2})_{b_0}=B_{b_0}$，于是 A_{a_1}与B的截段B_{b_0}相似。但是B中只有一个截段与A_{a_1}相似，即B_{b_1}，故$b_1=b_0$，但$b_0\in B_{b_2}$，故$b_0<b_2$，因之$b_1<b_2$。所以有

$$M\simeq N。$$

最后，由上述讨论可知可能发生下列四种情况：

（1）$M=A, N=B$,

（2）$M=A, N=B_b$,

（3）$M=A_a, N=B$.

（4）$M=A_a, N=B_b$.

但其中第四种情况是不会发生的，因若发生，则 a 是 A 的就范元素，而$a\in M=A_a$，矛盾。

于是只剩下三种可能情形。第一种

$$A\simeq B,$$

第二种及第三种情形表示一集与另一集的截段相似，故定理成立。

定义 2：若有$b\in B$，使

$$A\simeq B_b,$$

则称A短于B。

定理 8：设$\mathfrak{M}$是两两不相似的良序集为元素的集族，则$\mathfrak{M}$中存在一个最短的集。

证明：设$A\in\mathfrak{M}$，若A不是最短的，则有较A短的良序集B，由定理 7 知B必与A的某个截段相似，即有 $a\in A$，使 $B\simeq A_a$。令

$$A_0=\{a: 有a\in A及B\in\mathfrak{M}, 使B\simeq A_a\}$$

则$A_0 \neq \phi$，$A_0 \subset A$。因A_0是良序集A的子集，故有最前元素a_0，则$\mathfrak{M}$中有元素A'，使

$$A' \simeq A_{a_0}。$$

由a_0的取法可知，此A'即为$\mathfrak{M}$中最短的集。

实际上，对于$\mathfrak{M}$中任一集B，如果A短于B，则A'短于B。如果B短于A，则$B \sim A_a$，$a \in A_0$。但a_0为A_0的最前元素，故$a_0 < a$。因此，A_{a_0}短于A_a，于是A'短于B。

定理 9：良序集的全序和是良序集。

证明：设

$$S = \sum_{\lambda \in D} A_\lambda,$$

其中D及$A_\lambda(\lambda \in D)$都是良序集。由§2定义3，S是全序集。设S_0是S的非空子集，令

$$D_0 = \{\lambda: A_\lambda \cap S_0 \neq \phi,\ \lambda \in D\},$$

因D是良序集，故D_0有最前元素。设λ_0是D_0的最前元素，则A_{λ_0}的子集$A_{\lambda_0} \cap S_0 \neq \phi$。因$A_{\lambda_0}$是良序集，故$A_{\lambda_0} \cap S_0$有最前元素$a_0$，则$a_0$亦为$S_0$的最前元素。

S的任一非空子集S_0都有最前元素，故S为良序集。

习　　题

1. 有限良序集不能与其真子集相似，但无限良序集必可与其某个真子集相似。

2. 全序集不是良序集的必要且充分条件是它含有ω^*型子集。

3. 实数集按大小关系不是良序集，它的子集若是良序集则至多是可列集。

4. 设$(A, \leqslant)$是良序集，C是一个集，若对每个$x \in A$，$A_x \subset C$时有$x \in C$，则$A \subset C$。

5. 设$(A, \leqslant)$是良序集，P是给与的性质，假定每个$y \in A_x$具有性质P时，$x \in A$也具有性质P，则对于每个$x \in A$都具有性质P。

§4. 序数(ordinal number)

定义 1： 良序集的序型称为**序数**(*ordinal number*)，良序无限集的序数称为**超限数**（*transfinite number*）。

例：0及一切自然数都是序数，$w, w+1$，$w+w$ 等都是超限数。

序型w^*，η，π 等都不是序数。因为具有这样序型的全序集不是良序集。

定义 2： 设μ, v是两个序数，取两个良序集A, B，使

$$\widetilde{A}=\mu, \widetilde{B}=v,$$

若A短于B，则称μ小于v或v大于μ，记作

$$\mu<v \text{ 或 } v<\mu.$$

由序型的定义可知，序数大小的概念仅与μ，v有关，而与A及B的取法无关。

按此定义，有限序数间的大小与通常自然数的大小意义一致，即

$$0<1<2<3<\cdots$$

任何超限数大于所有有限序数。

很重要的是二序数间的大小关系只有三种可能。

定理 1： 设μ，v是两个序数，则

$$\mu=v, \mu<v, \mu>v$$

有且仅有一个关系成立。

证明： 设A, B是两个良序集，有

$$\widetilde{A}=\mu, \widetilde{B}=v。$$

由§3定理7知任何二良序集或为相似或为一个短于另一个。

如果相似，则 $\mu=v$；如果A短于B，则 $\mu<v$；如果 B 短于 A，则$v<\mu$。三者有且仅有一个成立。

定理 2：若B是良序集A的子集，则

$$\widetilde{B}\leqslant\widetilde{A}。$$

证明：由§3定理 5 推论 3 知

$$\widetilde{A}<\widetilde{B}$$

是不可能的，故必有

$$\widetilde{B}\leqslant\widetilde{A}。$$

定理 3：设S是由不同序数组成的集，则 S 中必有最小的数。

证明：对应每个 $\mu\in S$，取良序集 A，使 $\widetilde{A}=\mu$，设A_0是这种A中的最短者，由§3定理 8，A_0是存在的，则 $\widetilde{A_0}=\mu_0$是S中最小的数。

推论 1：在序数构成的集中，以其大小为序，必构成良序集。

设 μ 为序数，以W_μ表示一切小于 μ 的序数的全体。

推论 2：W_μ是良序集。

定理 4：W_μ的序数是μ，即$\widetilde{W}_\mu=\mu$。

证明：取良序集A，满足

$$\widetilde{A}=\mu,$$

设$\mathscr{H}$为A的一切截段的集，首先证明

$$\mathscr{H}\simeq A。$$

显然$\mathscr{H}$按“短于”的关系构成全序集。设$a\in A$，以A_a表示由 a 确定的截段，建立映射$\varphi:A\to\mathscr{H}$为

$$\varphi(a)=A_a,$$

显然这个映射是双射。由于截段具有

当$a_1<a_2$时，$A_{a_1}=(A_{a_2})_{a_1}$

的性质，故当 $a_1 < a_2$ 时，有 $\varphi(a_1) < \varphi(a_2)$，即

$$A \simeq \mathscr{H}。$$

其次证明

$$\mathscr{H} \simeq W_\mu。$$

令

$$\psi(A_a) = \widetilde{A}_a,$$

因 $\mathscr{H}$ 的每个元素 B，都有 $a \in A$，使

$$A_a = B,$$

故 A_a 的序型是小于 μ 的序数 $\widetilde{A}_a$，即 ψ 为 $\mathscr{H}$ 到 W_μ 的映射。

$\mathscr{H}$ 的不同元素是由 A 的不同元素确定的截段，当 $a \neq b$ 时，由§3定理 5 推论 2 知 A_a 与 A_b 的序型不相等，故 ψ 为单射。

因 W_μ 的每个序型 v 都小于 μ，故 A 中有截段的序型为 v，故 ψ 为满射。

由§3定理 7，$\mathscr{H}$ 的任二元素 B_1，B_2，若 B_1 短于 B_2，则 $\widetilde{B}_1 < \widetilde{B}_2$。故 ψ 为相似变换。故

$$\mathscr{H} \simeq W_\mu。$$

因为

$$A \simeq \mathscr{H}, \mathscr{H} \simeq W_\mu, \widetilde{A} = \mu,$$

故

$$\widetilde{W}_\mu = \mu。$$

推论：设良序集 A 的序数为 μ，则 A 中一切元素可以用小于 μ 的序数来编号。

实际上，$A \simeq W_\mu$，A 中每个元素有一个小于 μ 的序数与之对应，故 A 可以表示为

$$A = \{a_0, a_1, \cdots, a_v, \cdots\} \ (v < \mu)$$

注意：这个表示并不意味着它是可列的，其中 v 并不限于自然数；还可以看出，一切序数的集是不可想像的。

实际上，设W表示一切序数的集，则由定理3的推论知W是良序集。设其序数为ξ，则由定理4知W_ξ的序数亦为ξ，W_ξ为W的截段，而W_ξ与W相似。这与§3定理5推论1矛盾。

可见所谓一切序数的集和一切基数的集一样，都是不可想像的。

定理 5：设S是良序集，其中元素是序数，则S中一切序数之和是一个序数。

这个定理从全序和的定义和§3定理2可直接推得。

定理 6：设S是由序数组成的集，则存在一个序数大于S中任何序数。

证明：首先注意对于任何序数μ。必有大于μ的序数，例如$\mu+1$就是。因此若S有最大序数时，定理显然成立。

若S没有最大序数，则因S为良序集，由定理5

$$\sigma = \sum_{\mu \in S} \mu$$

也是一个序数。

对每个序数$\mu \in S$，取全序集A_μ，使

$$\widetilde{A}_\mu = \mu。$$

设它们的全序和为

$$B = \sum_{\mu \in S} A_\mu,$$

则每个A_μ是B的某个截段B_b的子集（B_b表示由B的元素b所确定的截段）。而b是$A_{\mu'}$的最前元素，其中$\mu' \in S$且$\mu' > \mu$。由§3定理5的推论1和推论3知B与A_μ或A_μ的截段都不会相似。故σ既不等于μ也不会小于μ，而是

$$\sigma > \mu。$$

定理7：序数$\mu+1$是序数μ的后继序数。

证明：设υ为μ的后继序数，则

$$W_{\upsilon}=W_{\mu}+\{\mu\}。$$

由序数的加法定义及定理4，有

$$\upsilon=\mu+1。$$

于是每一个序数都有其后继序数。但是却未必都存在直前序数。例如ω就是这种序数。自然可以将序数分为两类。

定义 3：有直前序数的序数称为**孤立序数**（*isolated ordinal*），无直前序数的序数称为**极限序数**（*limit ordinal*）。

有限序数（除0外）都是孤立序数，设ξ为序数，则形如$\xi+n$的序数也是孤立序数。而ω，$\omega+\omega$等都是极限序数。

习　　题

1．设μ,υ为超限数，且$\mu<\upsilon$，则有

$\xi+\mu<\xi+\upsilon$

$\mu+\xi\leqslant\upsilon+\xi$。

2．设μ,υ为超限数，$\xi>0$，$\mu<\upsilon$，则有

$\xi\mu<\xi\upsilon$，$\mu\xi\leqslant\upsilon\xi$。

3．设μ,υ为序数，$\upsilon<\mu$，则满足

$\upsilon+\xi=\mu$

之ξ恒存在且唯一，而满足

$\eta+\upsilon=\mu$

的η却未必存在。

4．设γ为极限序数，试证

$\mu+\gamma=sup\{\mu+\xi\,|\,\xi<\gamma\}$。

§5. 可列超限数

定义 1：可列的良序集的序型称为**可列超限数**。

用Z_1表示可列超限数的全体，Z_1也构成良序集。

定理 1：ω是最小的超限数。

证明：依定义，ω 是集

$$N = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

的序型。集N 的任何截段都是有限集，故小于ω的序数必为有限数。因此，ω是最小的超限数。

定理 2：若 μ 是可列超限数，则 $\mu + 1$ 也是。

证明：由§4定理 4 知$\widetilde{W}_\mu = \mu$，故

$$\widetilde{\{W_\mu \cup \{\mu\}\}} = \mu + 1 = \widetilde{W}_{\mu+1}。$$

但W_μ是可列集，而 $W_\mu \cup \{\mu\}$ 仍为可列集，故$\widetilde{W}_{\mu+1} \in Z_1$，则$\mu + 1$ 也是可列超限数。

定理 3：设S是Z_1的可列子集，γ是大于 S 中所有序数的最小序数，则 $\gamma \in Z_1$。

证明：若 S 有最大超限数 ξ，则 $\gamma = \xi + 1 \in Z_1$。

若 S 没有最大的元素，首先证明。

$$W_\gamma = \bigcup_{\mu \in S} W_\mu。$$

实际上，若 $\xi \in \bigcup\limits_{\mu \in S} W_\mu$，有$\mu_0 \in S$，使$\xi < \mu_0 < \gamma$，故$\xi \in W_\gamma$。

反之，若$\sigma \in W_\gamma$，则 $\sigma < \gamma$. 即σ 不能大于S中所有的序数。故S中有序数 μ_0，使 $\mu_0 \geqslant \sigma$。因 μ_0 不是 S 中最大的序数，故在 S 中必有 $\mu' > \mu_0$，因而 $\sigma \in W_{\mu'}$，故

$$W_\gamma = \bigcup_{\mu \in S} W_\mu。$$

因 $\bigcup\limits_{\mu \in S} W_\mu$是可列集，故 W_γ是可列集。γ 是 W_γ 的序数，故

$\gamma \in Z_1$。

推论： Z_1不是可列集。

实际上，若Z_1为可列集，则在Z_1各序数之后的第一个序数由定理亦应属于Z_1，这与Z_1的定义矛盾。

集Z_1的基数记作$\aleph_1$（读做 *Aleph*），跟随Z_1的后面第一个序数记作ω_1。

定理 4： 在可列集的基数a与$\aleph_1$之间不存在其它的基数。

证明： 由ω_1的概念知集

$$W_{\omega_1} = N \cup Z_1,$$

由$\aleph_1$的概念知

$$\overline{\overline{W}}_{\omega_1} = \overline{\overline{N \cup Z_1}} = \overline{\overline{Z}}_1 = \aleph_1。$$

若有基数$\mathfrak{M}$满足

$$a < \mathfrak{M} < \aleph_1,$$

则在W_{ω_1}中可以选出一个基数为$\mathfrak{M}$的子集Q。因集Q不与W_{ω_1}相似，故Q必定与W_{ω_1}的一个截段相似。但是W_{ω_1}的每个截段乃由N中的数或由Z_1的序数所截得，故或是有限集或是可列集，这与$\overline{\overline{Q}} > a$矛盾。

定理 5： 设极限序数μ是可列超限数，则必有单调增加的序数列

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots$$

存在，使大于所有β_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 的一切序数中μ是最小的一个。

证明： 因μ是可列超限数，由§4 定理 4 知W_μ是可列集，故可将它排列为

$$\mu_1, \mu_2, \cdots$$

的形式。因μ是极限序数，故$\{\mu_n\}$中必不存在最大的序数。

任取 n_1、n_2，使 n_2 为适合 $\mu_n > \mu_{n_1}$ 且大于 n_1 的最小自然数，取 n_3 为适合 $\mu_n > \mu_{n_2}$ 且大于 n_2 的最小自然数，以下类推。于是得到一个单调增加的序数列

$$\mu_{n_1} < \mu_{n_2} < \mu_{n_3} < \cdots$$

且

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

由作法可知 μ 必大于 $\{\mu_{n_k}\}$ 中所有的序数。

若 $\gamma < \mu$，则 $\gamma \in W_\mu$，在序列

$$\mu_1, \mu_2, \cdots$$

中必有 $\mu_m = \gamma$。若 m 与某个 n_i 一致，则 γ 属于 $\{\mu_{n_k}\}$，而 γ 不能大于所有的 μ_{n_k}。若

$$n_k < m < n_{k+1},$$

则由 n_{k+1} 的取法知 n_{k+1} 是满足 $\mu_n > \mu_{n_k}$ 且 $n > n_k$ 的最小自然数，故 $\gamma < \mu_{n_k}$。

这说明只若 $\gamma < \mu$，必不能大于所有的 μ_{n_k}，故 μ 是大于诸 μ_{n_k} 的最小者。因此，$\{\mu_{n_k}\}$ 即为所求的序数列。

定义 2：设 μ 为序数，A 为良序集，$\widetilde{A} = \mu$，令 $\overline{\overline{A}} = \varphi(\mu)$，称 $\varphi(\mu)$ 为序数 μ 的**基数**。

由§1定理 1 知 $\varphi(\mu)$ 由 μ 确定，与 A 的取法无关。

为了书写统一起见，令 $\aleph_0$ 为可列良序集的基数，则可列超限数必满足

$$\varphi(\mu) = \aleph_0$$

令

$$K(\mathfrak{M}) = \{\mu : \varphi(\mu) = \mathfrak{M}\}$$

由 §4 定理 3 知 $K(\mathfrak{M})$ 是良序集。故有最小元，记作 $\psi(\mathfrak{M})$。若 $\mathfrak{M}$ 为超限的，则 $\psi(\mathfrak{M})$ 必为极限超限数。$\psi(\mathfrak{M})$ 称为基数 $\mathfrak{M}$ 的**始数** (*initial ordinal*)。例如 $\psi(\aleph_0) = \omega$，$\aleph_0$ 的始

数就是最小的超限数w。

对于任意超限的基数$\mathfrak{M}$，令

$$L(\mathfrak{M})=\{\mathfrak{N}:\aleph_0\leqslant\mathfrak{N}\leqslant\mathfrak{M}\},$$

则$L(\mathfrak{M})$是良序集。若$\mu(\mathfrak{M})$为$L(\mathfrak{M})$的序数，则$\mathfrak{M}\to\mu(\mathfrak{M})$为一一保序映射。将基数$\mathfrak{M}$以$\aleph\cdot\mu(\mathfrak{M})$表示之，当$\mathfrak{M}=\aleph_0$时，$L(\mathfrak{M})$为$\phi$，故$\mu(\aleph_0)=0$；当$\mathfrak{M}$为第一个不可数基数时，$L(\mathfrak{M})$仅由$\aleph_0$一个元素组成，故$\mu(\mathfrak{M})=1$，从而写做$\aleph_1$。而$\Psi(\aleph)$的始数就是第一个不可数序数$\omega_1$。

习　　题

1．在实数集中，按实数大小的顺序，举出有如下序数的良序集的例子：

(a) w

(b) $1+w, w+1$

(c) $2\cdot w$，$w\cdot 2$

(d) w^2

(e) $(2(w+1))^2$，$2^2(w+1)^2$

(f) $w^3\cdot 2+w$

(g) $w+w^2+w^3+\cdots+w^n+\cdots$（写作$w^w$）

2．设μ为可列超限数，必可取有理数的集A，按有理数的大小顺序，使A成为序数为μ的良序集。

3．设序数μ的基数为$\varphi(\mu)$，则

(a) 当$\varphi(\mu)<\varphi(v)$时必有$\mu<v$，

(b) 当$\mu<v$时必有$\varphi(\mu)\leqslant\varphi(v)$。

并举例指出(b)中等号不可去掉。

4．设$\{\mu_i:i\in N\}$为可列超限数序列，则

$\sup\limits_{i\in N}\{\mu_i\}<w_1$。

5．设序数μ的基数为$\varphi(\mu)$，则$\varphi(\mu)$的任意集必是良序集。

第五章　极大原理 (maximal principle)

§1　极大原理

熟知集族按包含关系构成有序集。一般的，集族中是否含有极大元呢？即集族$\mathfrak{M}$中是否有集A，$\mathfrak{M}$中有没有真含A的集呢？这是不一定的。如区间集$\{(a, b): a>0, b<1\}$中就没有极大元。我们考虑一种特殊类型。

定义1： 集族$\mathfrak{M}$的全序子族$\mathfrak{N}$称为套（*nest*）。

在确定的集族$\mathfrak{M}$里观察所有的套。

定义2： 集族$\mathfrak{M}$的所有套$\mathfrak{N}$的集中，若有套$\mathfrak{N}_0$，对集族$\mathfrak{M}$的任意套$\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}\supset\mathfrak{N}_0$（真正包含）均不成立时，称$\mathfrak{N}_0$为$\mathfrak{M}$的极大套（*maximal nest*）。

例1： 集族

$$\mathfrak{N}_1=\left\{\left(a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right): n=1,\ 2,\ \cdots,\ b-a\geq 2\right\}$$

按包含关系是一个套。而

$$\mathfrak{N}_2=\{(a+\alpha,\ b-\beta): 0<|\alpha|,\ |\beta|<1\ |a-b|>2\}$$

按包含关系不是套。

例2： 在$p([0,\ 2])$中，集族

$$\mathfrak{N}_1=\left\{\left(0+\frac{1}{n},\ 2-\frac{1}{n}\right): n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

$$\mathfrak{N}_2=\left\{\left(0+\frac{1}{2n},\ 2-\frac{1}{2n}\right): n=1, 2, \cdots\right\}$$

是套，且$\mathfrak{N}_2\subset\mathfrak{N}_1$，$\mathfrak{N}_1$也并非$p([0,\ 2])$的极大套。如集族

$$\mathfrak{N}_3=\left\{\left(0+\frac{2}{n},\ 2-\frac{2}{n}\right): n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\right\}$$

就是真包含$\mathfrak{N}_1$的套。而形如

$$\mathfrak{N}_4=\{(0+\alpha,\ 2-\alpha): \alpha\in[0,\ 1]\}$$

的集族是$p([0,\ 2])$的一个极大套。

我们采取以下叙述做为公理：

Hausdorff 极大原理：设$\mathfrak{M}$是集族，对于$\mathfrak{M}$中任一套Q，必有极大套$\mathfrak{N}$，使

$$\mathfrak{N}\supset Q。$$

定理1 （极大原理）：若对于集族$\mathfrak{M}$的每个套$\mathfrak{N}$，有$\mathfrak{M}$的成分$A_{\mathfrak{N}}$，它包含$\mathfrak{N}$的每个成分，则集族$\mathfrak{M}$必有极大成分。

注意：组成集族$\mathfrak{M}$的集称为集族$\mathfrak{M}$的成分，即$\mathfrak{M}$的元素。

证明：由$Hausdorff$ 极大原理，每个套都包含在某个极大套中，故可设$\mathfrak{N}$为极大套，就极大套来证明本定理。

由条件，有$A\in\mathfrak{M}$，对于任意$N\in\mathfrak{N}$，有$A\supset N$，故$A\supset\bigcup\limits_{N\in\mathfrak{N}}N$。此$A$即为$\mathfrak{M}$的极大成分。

否则，若有$B\in\mathfrak{M}$，使$B\supset A$，则将B添加于$\mathfrak{N}$中，仍然是一个套且真正包含$\mathfrak{N}$。这与$\mathfrak{N}$是极大套矛盾，故A为$\mathfrak{M}$的极大成分。

定理2 （极小原理）：若对于集族$\mathfrak{M}$的每个套$\mathfrak{N}$，有$\mathfrak{M}$的成分$A_{\mathfrak{N}}$，它被包含在$\mathfrak{N}$的每个成分中，则集族$\mathfrak{M}$必有极小成分。

证明：做 $S=\cup\{A: A\subset\mathfrak{M}\}$，$\mathfrak{M}'=\{S-A: A\in\mathfrak{M}\}$，观察集族 $\{S-N: N\subset\mathfrak{N}\}=\mathfrak{N}'$，因 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的套，故 $\mathfrak{N}'$ 是 $\mathfrak{M}'$ 的套。因对任一 $N\in\mathfrak{N}$，有 $A_n\subset N$，故对任意 $S-N$，有 $S-A_{\mathfrak{N}}\supset S-N$。即对于套 $\mathfrak{N}$，有 $\mathfrak{M}$ 的成分 $S-A$，它包含 $\mathfrak{N}'$ 的每个成分。由定理 1，$\mathfrak{M}'$ 有极大成分 M，而 $S-M$ 是 $\mathfrak{M}$ 的极小成分。

定义3：有序集 A 的全序子集称为链（*chain*）序集 A 的链 B 若对于 A 的任意全序子集 A'，$A'\supset B$（真包含）皆不成立时，B 称为 A 的极大链（*maximal chain*）。

定理3：（*Kuratowski*引理）有序集 A 的每个链被含在某个极大链中。

证明：设 B 为有序集 A 的链，设 $\mathfrak{M}$ 是 A 中含 B 的链的全体构成的集族。若 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的套，则 $\bigcup\limits_{N\in\mathfrak{N}} N\in\mathfrak{M}$，于是满足定理 1 的条件，故 $\mathfrak{M}$ 有极大成分。这个极大成分就是 A 的极大链。

定义4：设 A 为非空有序集，若 A 的任意链都有上界，则称 A 为归纳的（*inductiue*）。

定理4（*Zorn*引理）：如果非空有序集中每个链都有上界，则该集有极大元素。即归纳的有序集有极大元。

证明：由定理 3 每个链必含在某个极大链中，由条件知极大链也必有上界，这个上界就是极大元素。

定义5：当且仅当集族 $\mathfrak{M}$ 满足条件

（1）若集 A 为集族 $\mathfrak{M}$ 的成分，则 A 的任一有限子集 B 必在 $\mathfrak{M}$ 中。

（2）若集 A 的任一有限子集 B 皆在 $\mathfrak{M}$ 中，则 A 在 $\mathfrak{M}$ 中。

则，称集族 $\mathfrak{M}$ 为有限特征的（*finite character*）。

定理5（*Tukey*引理）：每个有限特征族有极大成分。

证明：设$\mathfrak{M}$为有限特征族，$\mathfrak{N}$为$\mathfrak{M}$的套，令

$$A=\bigcup_{N\in\mathfrak{N}}N,$$

A的每个有限子集F，必含在有限个N中，因$\mathfrak{N}$是套，故这有限个N必有最大的N，使$F\subset N$。因$\mathfrak{M}$是有限特征族，故$F\in\mathfrak{M}$。又因A的任一有限子集$F\in\mathfrak{M}$，故$A\in\mathfrak{M}$，即对于$\mathfrak{M}$中的套$\mathfrak{N}$，有$A\in\mathfrak{M}$，它包含$\mathfrak{N}$的每个成分。由定理1，$\mathfrak{M}$有极大成分。

定理6（选择公理）(*axiom of choice*)：若对于指标集D的每个元素λ，$A_\lambda\neq\phi$，则D上有函数c，使得对于每个$\lambda\in D$，有$c(\lambda)\in A_\lambda$。

证明：设$\mathcal{G}$为定义在D的子集上在λ点的值在A_λ中的函数的全体。则$\mathcal{G}$具有有限特征性。

实际上，若$f\in\mathcal{G}$，则f的任意有限子集为定义在D的有限子集上的函数，故都在$\mathcal{G}$中。反之，若f的任意有限子集皆在$\mathcal{G}$中，则f也是D的子集上定义的函数，故$f\in\mathcal{G}$。因此$\mathcal{G}$具有有限特征性。由定理5 $\mathcal{G}$有极大成分c。

c的定义域必为D。否则，若c的定义域为L真含于D中，则有$x\in D\setminus L$，取$y\in A_x$，则$c\cup\{(x,\ y)\}$也是函数，与c的极大性矛盾。所以c的定义域为D。

函数c称为选择函数(*choice function*)。

定理7（*Zermelo*公理）：若$\mathfrak{M}$是非空集的互不相交族，则有集C满足。

（1）对于每个$A\in\mathfrak{M}$，使$A\cap C$含有单元素。

（2）$C\subset\bigcup_{A\in\mathfrak{M}}A$。

证明：设$\mathfrak{M}=\{A_\lambda:\ \lambda\in D\}$，应用选择公理于指标集$D$，对每个$\lambda\in D$，有单元素$c(\lambda)$，$c(\lambda)\in A_\lambda\in\mathfrak{M}$，

做 $\{c(\lambda)\}=C$，则对任一 $A_\lambda \in \mathfrak{M}$，有 $A_\lambda \cap C = c(\lambda)$ 为单元素集。

习　　题

1. 应用Zermelo 公理证明选择公理。
2. 应用选择公理证明Tukey引理。
3. 应用Tukey引理证明Zorn引理。
4. 应用选择公理证明 Hausdorff 极大原理。
5. 应用 Zorn 引理证明 Kuratowski 引理。
6. 应用 Zermelo 公理证明 Zorn引理。
7. 应用Zorn引理证明Zermelo公理。
8. 应用 *Tukey* 引理证明 *Hausdorff* 极大原理。
9. 选择公理与下述各条件分别是等价的：

(a) 设$\{A_\lambda : \lambda \in D\}$中对任一$\lambda \in D$，有$A_\lambda \neq \phi$，则$\prod_\lambda A_\lambda \neq \phi$。

(b) 若$A=\sum_{\lambda \in D} A_\lambda$，则有$B \subset A$，使$B \cap A_\lambda$对任一$\lambda \in D$皆为单元素集（$B$称为$A$的选择集）（*choice set*）。

(c) 对于满射$f: A \to B$有映射$g: B \to A$，使

$$f \circ g = I_B。$$

§2　良序原理与超限归纳法 (well-ordering principle and transfinite induction)

定义1：如果在集A中引入一个全序关系，使A成为良序集，则称为将A良序化。

定理1　（良序原理）：每个集都可以良序化。

为了证明定理，我们先讨论下述定义和引理。

设$(S, <)$为全序集。令关系“$\leqslant$”为关系“$<$”与

"△"的并集。则（S，$\leqslant$）仍为全序集。

定义2：S的序子集A

$$A=\{y: y\leqslant x,\ x\in A\}$$

称为序关系"$\leqslant$"的截段（*segment*）。

引理1：设S为非空集，c为$p(S)\setminus\phi$上的选择函数，S上的序关系"$\leqslant$"若满足

（1）"$\leqslant$"为自反的线性序关系，定义域$D\subset S$；

（2）对每个截段$A\neq D$，$D-A$的最前元素为$c(S-A)$；

则序关系"$\leqslant$"是D的良序关系。

证明：设B为D的任意子集，做D的子集E

$$E=\{y: y<x,\ 对每个\ x\in B\}$$

则

$$E=\{z: z\leqslant y,\ y\subset E\}。$$

即E为序关系"$\leqslant$"的截段，由E的做法显然有

$$E\cap B=\phi。$$

由条件2知$c(S-E)$为$D-E$的最前元素。因$E\cap B=\phi$，$B\subset D$，故$B\subset D-E$。由E的作法知$D-E$的最前元素必在B中且为B的最前元素。

D的任一子集都有最前元素，故D为良序集。

引理2：设S为非空集，c为$p(S)\setminus\phi$上的选择函数，$\mathscr{C}$为满足下列关系的自反的线性序关系"$\leqslant$"的集：

$\leqslant$的定义域$D\subset S$，对每个截段$A\neq D$，$D-A$的最前元素为$c(S-A)$。

则$\mathscr{C}$是全序集。

证明：设"$\leqslant$"，"$\leqq$"$\in\mathscr{C}$，它们的定义域分别是D，E，设

$$A = \{x: \{y: y \leqslant x\} = \{y: y \leqq x\}\},$$

且在A上这两个序关系一致，则A为$\leqslant$及$\leqq$的截段。若$A \neq D$且$A \neq E$，则$c(S-A)$为$D-A$及$E-A$的最前元素，由A的作法，故$c(S-A)$应在A中。另方面，由条件2知$C(S-A)$应在$S-A$中，故矛盾。所以必须有

$$A = D \text{ 或 } A = E,$$

即"$\leqslant$"和"$\leqq$"二者中一个的定义域是另一个的截段，且在截段上二者一致。即$\mathscr{C}$中任意两个序关系都能比较。

定理的证明：设S为非空集，设$\mathfrak{M}$是S的一切非空子集构成的集族，c是$\mathfrak{M}$上的选择函数，今依靠c在S中引入序，使之成为良序集。引入的方法是构成一个序关系$\leqq$，使得对于每个截段A，$S-A$的最前元素是$c(S-A)$。

设$\mathscr{C}$为所有自反线性序$\leqq$且满足下述条件的类：

（1）$\leqq$的定义域D是S的子集。

（2）对于异于D的每个截段A，$D-A$的最前元素是$c(S-A)$。

由引理1知$\mathscr{C}$的元素都是良序关系，且由引理2知$\mathscr{C}$是全序集。即彼此都可以比较。

作$\mathscr{C}$的成分的并，设为$\prec$，由引理2知$\prec$也属于$\mathscr{C}$，它是$\mathscr{C}$的最大成分。

若$\prec$的定义域为F，而$F \neq S$，则将$c(S-F)$添加于序关系的末尾，得

$$\prec \cup \{F \times \{c(S-F)\}\}$$

显然它符合$\mathscr{C}$的要求，而是$\mathscr{C}$的成分。它真正包含$\prec$，和$\prec$是$\mathscr{C}$的成分的并矛盾。故$F = S$，即集S关于关系入成为良序集。

定义3：良序集的基数称为良序基数。

定理2：任何两个良序基数是可以比较的。

证明：设α，β是两个良序基数，取良序集A，B，使

$$\overline{\overline{A}}=\alpha,\qquad \overline{\overline{B}}=\beta。$$

若A与B等势，则$\alpha=\beta$；否则，若A与B不等势，则A和B不相似，那末一定有一个较另一个为短。若A短于B，则

$$\alpha<\beta。$$

故两个良序基数恒可以比较，下列三个关系式

$$\alpha<\beta,\quad \alpha=\beta,\quad \alpha>\beta$$

有且仅有一个成立。

推论：一切基数之间都可以比较大小，即对于任意基数α，β，

$$\alpha<\beta,\quad \alpha=\beta,\quad \alpha>\beta,$$

有且仅有一个关系成立。

实际上，由定理1，任何集都可良序化。而集的基数与序无关，故一切基数都可以看做是良序基数。因良序基数可以比较，故一切基数都可以比较。

众所周知，完全归纳法在数学上是一种极为重要的方法，其原理的根据是自然数集是良序集。

定理3：设$T(n)$是与自然数n有关的一个命题。如果

（1）$T(n_0)$是正确的；

（2）若$T(n)$是正确的，则$T(n+1)$也是正确的；

则$T(n)$对于所有自然数$n\geqslant n_0$是正确的。

证明：若有自然数$n\geqslant n_0$，使$T(n)$不正确，则由自然数集是良序集，这种n中必有最小的自然数n'。由（1）$n'>n_0$，故$n'-1\geqslant n_0$。由n'的取法，$T(n'-1)$是正确的。由（2）$T(n')$也是正确的，矛盾。故所有$n\geqslant n_0$，

$T(n)$都是正确的。

关于超限数，我们有超限归纳法。

定理4：设$T(\mu)$是一个与序数μ有关的命题，如果满足

（1）$T(\mu_0)$是正确的；

（2）若$T(\mu)$对于$\mu_0\leqslant\mu<v$都是正确的，则$T(v)$也是正确的；

则$T(\mu)$对于一切序数$\mu\geqslant\mu_0$都是正确的。

证明：若有$\mu>\mu_0$使$T(\mu)$不正确。因序数的集是良序集，这种μ中必有最小的μ'。由（1）$\mu'>\mu_0$，当$\mu_0\leqslant\mu<\mu'$时$T(\mu)$都是正确的。由（2）$T(\mu')$也是正确的。矛盾。故对于一切序数$\mu\geqslant\mu_0$都是正确的。

超限归纳法不仅可以用于证明而且也可以用于定义。即归纳定义。

归纳定义 (*definition by induction*) 序数μ的函数$f(\mu)$，（1）若$f(\mu_0)$是有定义的，（2）当$\mu_0\leqslant\xi<\mu$时若所有$f(\xi)$是有定义的，则$f(\mu)$也是有定义的。则此函数$f(\mu)$对于一切$\mu\geqslant\mu_0$都是有定义的。

习　　题

1. 应用 *Zermelo* 公理证明良序原理。
2. 应用良序原理证明选择公理。
3. 应用良序原理证明极大原理。
4. 应用良序原理证明 *Zorn* 引理。

§3　极大原理的应用

在前两节中看到的 *Hausdorff* 极大原理、极大原理、

极小原理、*Kuratowski* 引理、*Zorn* 引理、*Tukey* 引理、选择公理、*Zermelo* 公理、良序原理等都是等价的。它们的等价形式远不止于此，谢邦杰在其《超穷数与超穷论法》（吉林人民出版社）一书中介绍了24个等价形式，其中包括了一些近十几年来的新成果。它们在泛函分析、抽象代数、拓扑学等近代数学中的应用是非常广泛的，早已成为近代数学理论中的重要而有力的工具之一。应用它们可以得到许多重要结果。例如在§2中看到的任意两个基数是能够比较的，以及集的有限性及无限性的诸种定义的等价性，紧拓扑空间的积空间是紧空间的 *Tychonoff* 定理、*Hausdorff* 分球面定理、*Banach-Tarski* 分球定理、域的代数封闭扩张的唯一存在定理、*Hahn—Banach* 扩张定理等等。今以极大滤子的存在性及线性空间中基底的存在性为例介绍如下。

刻划极限运算，滤子是一个有力的工具。

定义1：设 $\mathscr{F}$ 为集 S 的子集族，若 $\mathscr{F}$ 的任意有限子族的交不空，则称 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质（*finite intersection property*）。

定义2：设 $\mathscr{F}$ 为集 S 的子集族，若 $\mathscr{F}$ 的任意有限个的交仍属于 $\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为有限乘法的（*finite multiplicative*）。

定义3：设 $\mathscr{F}$ 为集 S 的子集族，若 $\mathscr{F}$ 满足条件：

（1）$\mathscr{F} \neq \phi$；

（2）$\mathscr{F}$ 具有有限交性质；

（3）若 $F \in \mathscr{F}$，且 $F \subset H$，则 $H \in \mathscr{F}$；

则称 $\mathscr{F}$ 为滤子（*filter*），当只满足（1），（2）时称之为滤子基（*filter base*）。

定义4：设 $\mathscr{F}'$ 为集 S 的子集构成的滤子基，$\mathscr{F}$ 为含有 $\mathscr{F}'$ 的某个元的 S 的所有子集族，即若

$\mathscr{F}=\{F: F\subset S$，有某个$F'\in\mathscr{F}'$使$F'\subset F\}$，

显然$\mathscr{F}$满足（1），（2），（3）而构成滤子，则称$\mathscr{F}$为由$\mathscr{F}'$生成的滤子。

定义5：若$\mathfrak{H}$为含$\mathscr{F}$的滤子，则必有

$$\mathfrak{H}=\mathscr{F}$$

时，称$\mathscr{F}$为**极大滤子**（*ultrafilter*）。

定理1：设S为非空集，若$\mathscr{F}$为S的滤子基，则含$\mathscr{F}$的极大滤子存在。

证明：令

$$\mathfrak{H}=\{H: H\supset F,\ F\in\mathscr{F},\ H\subset S\},$$

则显然$\mathfrak{H}$是滤子。含$\mathscr{F}$的滤子全体设为

$$\mathfrak{D}=\{\mathscr{F}_\alpha: \alpha\in A\},$$

则因$\mathfrak{H}\in\mathfrak{D}$，故$\mathfrak{D}\neq\phi$。根据$\mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{F}_\beta$规定$\mathscr{F}_\alpha\leqslant\mathscr{F}_\beta$，则$\{\mathscr{F}_\alpha\}$是有序集。显然$\{\mathscr{F}_\alpha\}$是归纳的有序集，由§1定理4（*Zorn*引理）它有极大元。显然$\mathfrak{H}$是含$\mathscr{F}$的极大滤子。

定理2：设$\mathscr{F}$为非空极大滤子，则下述成立

（1）$\mathscr{F}$是有限乘法的；

（2）对于S的任意子集A，必有$A\in\mathscr{F}$或$\complement A\in\mathscr{F}$。

证明：（1）所有$\mathscr{F}$的元的有限交构成的族$\mathfrak{H}$具有有限交性质，由定理1存在含$\mathfrak{H}$的极大滤子$\mathscr{S}$。显然由$\mathscr{F}\subset\mathfrak{H}$，故$\mathscr{F}\subset\mathscr{S}$；由$\mathscr{F}$的极大性有$\mathscr{F}=\mathscr{S}$，故$\mathscr{F}=\mathfrak{H}$，从而$\mathscr{F}$是有限乘法的。

（2）令$\mathscr{F}\cup\{A\}=\mathscr{S}$，若$\mathscr{S}$具有有限交性质，则和（1）的证明同样，有$\mathscr{F}=\mathscr{S}$。由此$A\in\mathscr{F}$。若$\mathscr{F}\cup\{S-A\}$，$\mathscr{F}\cup\{A\}$都不具有有限交性质，则由（1）$\mathscr{F}$是有限乘法的，故有$B$，$C\in\mathscr{F}$使$A\cap B=\phi$，$(S-A)\cap C=\phi$，$B\cap C\in\mathscr{F}$。而$B\cap C\subset(S-A)\cap A=\phi$，与滤子

的定义矛盾。由此，$A \in \mathscr{G}$或$S - A \in \mathscr{G}$成立。

线性空间是线性代数的基本概念之一，是常见的数学结构。

设K为数域，一般是指实数域或复数域。

定义6：设E是一个集，若对于E中元素x，y，有E中元素z与之对应，称此对应为加法。若E中有加法运算满足条件：

（1）交换律　$x + y = y + x$

（2）结合律　$(x + y) + z = x + (y + z)$

（3）E中有唯一元素0，称为**零元素**对于任何$x \in E$，有

$$x + 0 = x$$

（4）对于E中每个元素x，有唯一元素$x' \in E$，使

$$x + x' = 0$$

称x'为x的**负元素**，记之为$-x$。

这时，E称为关于加法构成**加群**(*Abelian group*)。

定义7：设E为加群，K为数域，若对任何$x \in E$及任何$a \in K$，存在元素$ax \in E$，称ax为a与x的**数积**(*scalar product*)。若满足条件

（1）$1 \cdot x = x$，　$(x \in E)$

（2）$a(bx) = (ab)x$，　$(a, b \in K, x \in E)$

（3）$(a + b)x = ax + bx$

$$a(x + y) = ax + ay \quad (a \in K, x, y \in E)$$

则称E为K上的**线性空间**(*linear space*)。

定义8：数域K上的线性空间E中有限个元素x_1，x_2，…，x_k，如果存在一组不全为0的数a_1，a_2，…，a_k使

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = 0$$

则称元素x_1，x_2，…，x_k是**线性相关的** (*linear dependence*)。否则称x_1，x_2，…，x_k是**线性无关的**(*linear independence*)。即x_1，x_2，…，x_k是线性无关的要充条件是

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$$

蕴含$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$。

定义9：设E是域K上的线性空间，A是E的子集，若A中任何有限个元素均线性无关，则称A是**线性无关**的。否则，称A是线性相关的。

定义10：设E是域K上的线性空间，A是E的子集，若A满足

（1）A是线性无关的，

（2）E的任意元素x，$\{x\} \cup A$都是线性相关的，则称A为E的**基底** (*basis*)。

关于基底的存在问题，可以应用极大原理予以证明。今用不同方法证明如下：

1. 设E为域K上的线性空间，根据良序原理，E上有良序。今在E上建立到$B = \{0, 1\}$的映射f。

（1）对E的最小元x_0，当$x_0 \neq 0$时令$f(x_0) = 1$，当$x_0 = 0$时令$f(x_0) = 0$，

（2）对于E的任意元素x，设$S(x)$为由x确定的截段，设f在$S(x)$上已有定义，令

$$U_x = \{y \in S(x) : f(y) = 1\},$$

当x不能用U_x的元素线性表出时，令

$$f(x) = 1,$$

当x能用U_x的元素线性表出时，令

$$f(x) = 0,$$

这时，根据超限归纳定义，唯一确定

$$f: E \to B。$$

令

$$U = \{x \in E: f(x) = 1\},$$

则U是E的一个基底。

Ⅱ 令

$\mathscr{U} = \{A \subset E: A \neq \phi, A$ 中任意有限集是线性无关的$\}$

则$\mathscr{U}$是非空的。对于$\mathscr{U}$引入序为

$$A \leqslant B \Longleftrightarrow A \subset B,$$

则显然$\mathscr{U}$是有序集，且每个链有上界，根据 Zorn 引理$\mathscr{U}$最少有一个极大元U，这个U就是E的基底。

Ⅲ. 对于E的子集A，属于A的任意有限个元素在K上线性无关的性质C是有限特征性质，故具有性质C的极大子集U是存在的。这个U就是E的基底。

第六章　格(Lattice)

§1　格的各种性质

定义1：在有序集（A，$\leqslant$）中，若对于任意元素x，$y \in A$，$inf\{x, y\}$及$sup\{x, y\}$恒存在时，称（A，$\leqslant$）为格（*Lattice*）。

显然全序集必定是格。

对于任意集合D，（$p(D)$，$\supset$）未必是全序集，但它是格。由并、交运算知$A \cap B = inf\{A, B\}$，$A \cup B = sup\{A, B\}$，这是一个比较重要的例子。

仿照这一事实，今后常将$inf\{x, y\}$，$sup\{x, y\}$分别写做$x \cap y$，$x \cup y$。分别称为x和y的交（*join*）和并（*meet*）。在格L中若将序换为对偶序，则$\cup$和$\cap$相替换得到新格L'，称之为L的对偶格（*dual lattice*）。

例1：设$\mathscr{F}$为由集合A到实数集R的函数全体的集合，对于f、$g \in \mathscr{F}$，当$x \in A$，恒有$f(x) \leqslant g(x)$时，规定为$f \leqslant g$。则"$\leqslant$"为$\mathscr{F}$上的序关系，而（$\mathscr{F}$，$\leqslant$）构成格。其中

$$(f \cap g)\ x = min\ \{f(x), g(x)\},$$

$$(f \cup g)\ x = max\ \{f(x), g(x)\}。$$

定理1：格中下述性质成立：

（1）幂等律：$x \cap x = x$，

（2）交换律：$x \cap y = y \cap x$，

（3）结合律：$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$，

（4）吸收律：$x \cap (x \cup y) = x$。

证明：（1）和（2）是显然的。

（3）设 $u = (x \cap y) \cap z$，由定义 $u \leqslant x \cap y$ 且 $u \leqslant z$，从而 $u \leqslant x$ 且 $u \leqslant y$ 同时 $u \leqslant z$。因 $u \leqslant y$ 同时 $u \leqslant z$，故 $u \leqslant y \cap z$。于是有 $u \leqslant x \cap (y \cap z)$，即 u 为 $\{x, y \cap z\}$ 的一个下界。设 w 为 $\{x, y \cap z\}$ 的任意下界，于是 $w \leqslant x$ 且 $w \leqslant y \cap z$，从而 $w \leqslant y$ 且 $w \leqslant z$。由 $w \leqslant x$，$w \leqslant y$ 有 $w \leqslant x \cap y$，由这和 $w \leqslant z$，故 w 是 $\{x \cap y, z\}$ 的一个下界，但 $u = (x \cap y) \cap z$：故 $w \leqslant u$，于是 u 是 $\{x, y \cap z\}$ 的下确界。即

$$(x \cap y) \cap z = u = x \cap (y \cap z)。$$

（4）由 $x \leqslant x$ 且 $x \leqslant x \cup y$，故 x 为 $\{x, x \cup y\}$ 的一个下界。设 z 为 $\{x, x \cup y\}$ 的任意下界，由定义，显然有 $z \leqslant x$，从而 x 是 $\{x, x \cup y\}$ 的下确界，而

$$x = x \cap (x \cup y)。$$

定理2： 格中下述性质成立：

（1）幂等律：$x \cup x = x$，

（2）交换律：$x \cup y = y \cup x$，

（3）结合律：$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$，

（4）吸收律：$x \cup (x \cap y) = x$。

由 $\cup$ 和 $\cap$ 的对偶性，由定理 1 可直接推得定理 2 。

由此可见，当有序集 $(A, \leqslant)$ 是格时，恒可确定 $x \cap y$ 及 $x \cup y$，且定理 1 及定理 2 成立。这一事实启示我们给出格以另外的定义，即

定义2： 在非空集 A 中，定义的运算 $\cap$，$\cup$，若满足定理 1 及定理 2 的四个性质，则称 $(A, \cap, \cup)$ 为格。

在定义 2 中没有涉及顺序，下确界及上确界等概念，仅是具有几个性质的两个运算$\cap$，$\cup$的集合。在这样定义的格中，当且仅当$x \cap y = x$时规定$x \leqslant y$，如此确定的关系“$\leqslant$”是序关系。

实际上，假设$x \leqslant y$，$y \leqslant z$，由“$\leqslant$”的定义，有$x = x \cap y$，$y = y \cap z$。由结合律有$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = x \cap z$。于是$x = x \cap y = x \cap (y \cap z) = x \cap z$，故$x \leqslant z$成立。即“$\leqslant$”是格中满足可迁性的二元关系。即“$\leqslant$”是序关系。其次证明

$$x \cap y = inf\{x, y\},$$
$$x \cup y = sup\{x, y\}。$$

因

$$\begin{aligned}(x \cap y) \cap x &= x \cap (x \cap y)\\ &= (x \cap x) \cap y\\ &= x \cap y\end{aligned}$$

故由$\leqslant$的规定，有

$$x \cap y \leqslant x。$$

同样有

$$x \cap y \leqslant y。$$

故$x \cap y$是$\{x, y\}$的一个下界。设z为$\{x, y\}$的任意一个下界，即$z \leqslant x$，$z \leqslant y$，由$\leqslant$的规定有

$$z = z \cap x, \quad z = z \cap y。$$

将前者代入后者，得

$$z = (z \cap x) \cap y。$$

于是由结合律

$$z = z \cap (x \cap y)。$$

由规定

$$z \leqslant (x \cap y),$$

故$x \cap y$为$\{x, y\}$的下确界。即$x \cap y = inf\{x, y\}$。

最后，若$x \leqslant y$，则$x = x \cap y$，由定理2的（4），有

$$y = y \cup (y \cap x) = y \cup (x \cap y)$$
$$= y \cup x = x \cup y。$$

即

$$x \cup y = sup\{x, y\}。$$

于是推得

定理3：格的两种定义是等价的。

设A为非空集，$L = (A, \cap, \cup)$为格，当A为有限集时，称为有限格。显然L和A是有区别的，但今后为叙述简便，经常将L和A混用，例如$x \in A$可以写做$x \in L$，A的子集可以说成是L的子集。在不致发生误解的情况下，也可将有序集$(A, \leqslant)$说成是格。

定义3：当$(A, \cap, \cup)$是格，在A的非空子集B中，若

$$a, b \in B，则 a \cap b \in B 且 a \cup b \in B$$

时，称$(B, \cap, \cup)$是A的子格。

显然子格是格。须注意，格的子集既或是格也未必是原来格的子格。即为了是子格，在子集中的格运算必须和原来的格运算一致。

例2：设$A = \{0, a, b, c, 1\}$，规定格运算为

$\cap$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b
c	0	a	a	c	c
1	0	a	b	c	1

$\cup$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	b	c	1
b	b	b	b	1	1
c	c	c	1	c	1
1	1	1	1	1	1

则（A，$\cap$，$\cup$）是格。令$A_1=\{a, b, c, 1\}$，则（A_1，$\cap$，$\cup$）是格（A，$\cap$，$\cup$）的子格。令$A_2=\{0, b, c, 1\}$，在A_2中规定序关系如上，则A_2是格但非（A，$\cap$，$\cup$）的子格。

实际上，在A_2中$inf\{b, c\}=0$而在A中$inf\{b, c\}=a$。

例3：在格（A，$\cap$，$\cup$）中，设a，$b\in A$且$a\leqslant b$。这时

$$[a, b]=\{x\in A: \quad a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为由a，b确定的区间，显然（$[a, b]$，$\cap$，$\cup$）是格（A，$\cap$，$\cup$）的子格。

特别的，形如（$p(A)$，$\cap$，$\cup$）的格的子格称为集格。

定理4：在任意格中下列诸式成立：

（1）$(x\cap y)\cup(x\cap z)\leqslant x\cap(y\cup z)$，

（2）$(x\cup y)\cap(x\cup z)\geqslant x\cup(y\cap z)$，

（3）若$z\leqslant x$，则$(x\cap y)\cup z\leqslant x\cap(y\cup z)$，

（4）$\bigcup\limits_{j=1}^{n}(\bigcap\limits_{i=1}^{m}x_{ij})\leqslant\bigcap\limits_{i=1}^{m}(\bigcup\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}))$。

（其中$\bigcup_{j=1}^{n} a_j$表示$a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$，$\bigcap_{j=1}^{n} b_j$表示$b_1 \cap b_2 \cap \cdots \cap b_n$）。

证明：（1）及（2）是容易证出的。

（3）设$(x \cap y) \cup z = u$，只须说明u是$\{x, y \cup z\}$的一个下界。由假定$z \leqslant x$，因$x \cap y \leqslant x$，故$u = (x \cap y) \cup z \leqslant x$。又因$x \cap y \leqslant y \leqslant y \cup z$及$z \leqslant y \cup z$得到$u \leqslant y \cup z$。于是$u$是$\{x, y \cup z\}$的下界，即$u \leqslant x \cap (y \cup z)$。

（4）对于任意的k（$\leqslant m$）及l（$\leqslant n$），有

$$\bigcap_{i=1}^{m} x_{il} \leqslant x_{kl}$$

成立。因

$$x_{kl} \leqslant \bigcup_{j=1}^{n} x_{kj},$$

故

$$\bigcap_{i=1}^{m} x_{il} \leqslant \bigcup_{j=1}^{n} x_{kj}$$

对于所有的l成立。于是

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \leqslant \bigcup_{j=1}^{n} x_{kj}$$

对所有的k成立。故

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \leqslant \bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} x_{ij}\right)。$$

在（3）中既或$z \leqslant x$，而$(x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z)$不成立的例子是容易举出的。对应于定理的1，2，3，考虑下述诸条件：

（1）$(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup z)$对所有$x$，$y$，$z$成立。

（2）$(x \cup y) \cap (x \cup z) = x \cup (y \cap z)$对所

有x，y，z成立。

（3）若$z \leqslant x$则$(x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z)$对所有$x$，$y$，$z$成立。

定义4：条件（1）及（2）称为**分配律**（*distributive law*），（3）称为**模律**（*modular law*）。分配律成立的格称为**分配格**（*distributive lattice*），而模律成立的格称为**模格**（*modular lattice*）。

定理5：分配格是模格。

证明：若$z \leqslant x$，则$x \cup z = x$。这个关系与（1）有$(x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z)$成立。

定理6：分配律的（1）和（2）是等价的。

证明：假设（1）成立，则

$$
\begin{aligned}
x \cup (y \cap z) &= x \cup (y \cap x) \cup (y \cap z) \\
&\qquad (\text{由 } x = x \cup (y \cap x)) \\
&= x \cup (y \cap (x \cup z)) \quad (\text{由 } 1) \\
&= (x \cap (x \cup z)) \cup (y \cap (x \cup z)) \\
&\qquad (\text{由 } x = x \cap (x \cup z)) \\
&= (x \cup y) \cap (x \cup z) \qquad (\text{由 } 1)
\end{aligned}
$$

于是推得（2）。同样，由（2）也推得（1）。

于是做为分配律的条件（1）或（2）只有一个成立即可。

如有限格，当格具有最小元及最大元时，用0及1表示它们。对于0，1，由格的定义可导出下述性质，

$$0 \cap x = 0, \qquad 1 \cap x = x,$$

$$0 \cup x = x, \qquad 1 \cup x = 1。$$

应用这一事实容易证明下式：

若$x \cup y = 0$，　则$x = y = 0$，

若 $x \cap y = 1$，　则 $x = y = 1$。

其证明留给读者作为练习。

关于格再考虑下述条件：

1．具有最小元 0 及最大元 1。

2．对于所有 x，使 $x \cup x' = 1$ 且 $x \cap x' = 0$ 成立的 x' 存在。

称这种 x' 为 x 的补元（*complement*）。满足这两个条件的格称为**相补格**（*complemented lattice*）。当相补格再满足分配律时称为 **Boole 代数**（*Boolean algebra*）或 **Boole格**（*Boolean lattice*）。

例4：对于集合 A 的子集 B，设 $\mathscr{C}(B)$ 为 B 关于 A 的补集，则有 $B \cup \mathscr{C}(B) = A$，$B \cap \mathscr{C}(B) = \phi$。容易证明 $(p(A), \cap, \cup)$ 是分配格，从而 $(p(A), \cap, \cup)$ 是最小元为 ϕ，最大元为 A 的 *Boobe* 代数。

例5：按序关系 $\{(a, b)\}$，$\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(a,d)\}$，集合 $\{a,b\}$，$\{a, b, c, d\}$ 分别是 *Boole* 代数。

例6：有限格可以简便地图示如下（见下页）：对于有限格 L 的各元，使平面上的一点对应之。若 $a < b$，则对应于 b 的点放在对应于 a 的点的上面；若 b 为 a 的后继元，则以线段连结对应于两元的点。

一元格、二元格、三元格各仅有一种（如图）。四个元素的格有两种，五个元素的格有五种，六个元素的格有十五种。下图除去最后一个外都是模格，除去最后两个外都是分配格。

在5.d，5.e中可看出补元未必是唯一确定的。

定义5：设 $(A, \cap, \cup)$ 及 $(B, \cap', \cup')$ 为格，

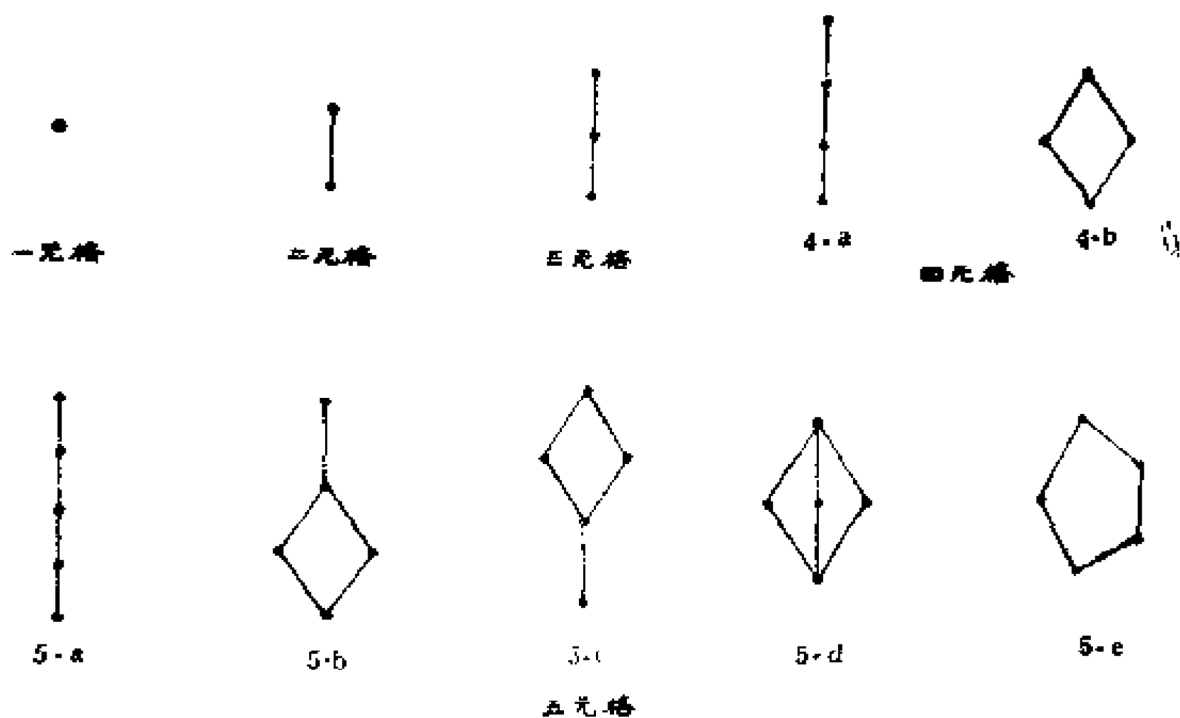


图 1

A到B的映射φ，若对于x，$y \in A$，恒有

$$\varphi(x \cap y) = \varphi(x) \cap' \varphi(y),$$

$$\varphi(x \cup y) = \varphi(x) \cup' \varphi(y)$$

时，称φ为**格同态映射**（*homomorphism of lattice*）。特别的，若φ为双射，则称φ为**格同构映射**（*isomorphism of lattice*）。当（A，∩，∪）到（B，∩′，∪′）的格同构映射存在时，称（A，∩，∪）和（B，∩′，∪′）为格同构。

定理7：格间的双射φ是格同构映射的要充条件是φ是序同构映射。

证明：若φ是格同构映射，则φ显然是序同构映射。设φ是格L_1到格L_2的序同构映射，为了指出$\varphi(x \cap y) = \varphi(x) \cap' \varphi(y)$，只需指出$\varphi(x \cap y)$是$\{\varphi(x)$，

$\varphi(y)\}$的下确界。由$x\cap y\leqslant x$及$x\cap y\leqslant y$，有$\varphi(x\cap y)\leqslant'\varphi(x)$且$\varphi(x\cap y)\leqslant'\varphi(y)$。其中$\leqslant'$为$L_2$上的格运算$\cap'$及$\cup'$确定的$L_2$上的序。于是$\varphi(x\cap y)$是$\{\varphi(x),\ \varphi(y)\}$的下界。今对于$z\in L_2$，$z\leqslant'\varphi(x)$且$z\leqslant'\varphi(y)$，因$\varphi$是满射，故有$u\in L$，使$\varphi(u)=z$。于是由假定$u\leqslant x$且$u\leqslant y$。即有$u\leqslant x\cap y$，从而$z=\varphi(u)\leqslant'\varphi(x\cap y)$。故$\varphi(x\cap y)$是$\{\varphi(x),\ \varphi(y)\}$的最大下界。同样可证明$\varphi(x\cup y)=\varphi(x)\cup'\varphi(y)$。

对于已予格L的二子格L_1，L_2，作为集合考虑它们的交$L_1\cap L_2$。若a，$b\in L_1\cap L_2$，则$a\cap b$及$a\cup b$都是$L_1\cap L_2$的元素。于是若$L_1\cap L_2$不空，则$L_1\cap L_2$是L的子格。其次考虑它们的并集$L_1\cup L_2$，$L_1\cup L_2$未必是L的子格。

例7：在集$L=\{0,\ a,\ b,\ c,\ 1\}$中确定序关系为$\{(0,\ a),\ (0,\ b),\ (0,\ c),\ (0,\ 1),\ (a,\ b),\ (a,\ c),\ (a,\ 1),\ (b,\ 1),\ (c,\ 1)\}$，则$L$是格。在子集$\{0,\ a,\ b\}$及子集$\{a,\ c\}$中按该序关系也是格，它们是$L$的两个子格，但它们的并不是格。

定理8：设A为格L的任一非空子集，则在L中包含A的最小子格必存在。

证明：设$\mathfrak{M}$为L中包含A的格的全体，因$L\supset A$，且L是格，故$L\in\mathfrak{M}$，而$\mathfrak{M}$非空。设$L(A)=\bigcap\limits_{L'\in\mathfrak{M}}L'$。若$a$，$b\in L(A)$，则$a\cap b$及$a\cup b$皆$\in L(A)$，故$L(A)$是$L$的一个子格。若$L'\in\mathfrak{M}$，则$A\subset L'$，故$A\subset\bigcap\limits_{L'\in\mathfrak{M}}L'=L(A)$，于是$L(A)$是$L$中包含$A$的子格。但若$L'\in\mathfrak{M}$，则必有$L(A)\subset L'$，故$L(A)$是包含$A$的最小子格。

这个$L(A)$称为由A生成的L的子格。

特别的，当取A为$L_1 \cup L_2$时确定格$L(L_1 \cup L_2)$。将这个格写做$L_1 \vee L_2$。为了叙述方便，将空集也看做L的子格，于是推得下述定理。

定理9：格L的子格全体的集合，关于运算$\cap$和$\vee$构成格，其最小元为ϕ，最大元为L。

习　　题

1. 在非空集A上定义运算$\cup$，$\cap$，满足定义2中的定理1及定理2的性质（2）—（4），试证$(A, \cap, \cup)$是格。

2. 试证有限格中有最大元及最小元。

3. 若$(A, \leqslant)$，$(B, <)$二者都是格，则直积$(A, \leqslant) \times (B, <)$也是格。

4. 在$\{a, b, c, d, e\}$中规定序关系为$\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$。则它是相补格但非模格。

5. 在$\{a, b, c, d, e\}$中规定序关系为$\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, e), (c, e), (d, e)\}$。则它是模格但非分配格。它也是相补格。

6. 试证模律与条件

$$(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup (x \cap z))$$

等价。

7. 试证分配律成立与下述条件（1′）和（2′）等价：

（1′）$(x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x)$

$= (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x)$.

（2′）若$x \cap y \leqslant z$且$x \leqslant y \cup z$，则$x \leqslant z$。

8. 在分配格中若补元存在则是唯一确定的。

9. 若f为格L_1到格L_2的格同态映射，则f是单调映射，反之其逆未必成立，试举出反例。

10. 当f为格L_1到格L_2的格同态映射时，

（a）若M为L_1的子格，则$f(M)$为L_2的子格。

（a）若M为L_2的子格，则$f^{-1}(M)$为L_1的子格。

11. 试证全序集是分配格。

12. 格L是全序集的要充条件是L的任意非空子集是L的子格。

13. 有序集之间的映射f满足条件：

若$x \leqslant y$，　则$f(x) \leqslant f(y)$

时，称f为**保序映射**。格之间的同态必定是保序的，而其逆未必成立，试举出反例。

注意：(7)实际上分配律、(1′)、(2′)三者等价，证明可留在§4后去作。

§2　完备格（complete lattice）

在格L中，当$a_1, a_2, \cdots, a_n \in L$时，恒有

$$inf\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = a_1 \cap a_2 \cap \cdots \cap a_n,$$

$$sup\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n。$$

这是显然的。即在格中对于任意有限子集其上，下确界恒存在。将这一现象推广，得出下述完备格的概念：

定义1：有序集（A，$\leqslant$）中，A的任意非空子集皆存在上确界及下确界时，称（A，$\leqslant$）为**完备格**（*complete lattice*）。

显然有限格是完备格，集格（$p(A)$，$\cap$，$\cup$）也是完备格。

由完备格的定义，若（A，$\leqslant$）为完备格，则A本身有上、下确界，故在完备格中必有最小元0及最大元1。且任一子集$\{a_i : i \in I\}$的下确界及上确界分别为$\bigcap_{i \in I} a_i$，$\bigcup_{i \in I} a_i$。

定理1，下述的任一条件都是有序集（A，$\leqslant$）为完备

格的充分条件。

（1）（A，$\leqslant$）有最大元1，A的任意非空子集有下确界。

（2）（A，$\leqslant$）有最小元0，A的任意非空子集有上确界。

证明：设（1）成立，B为A的任意非空子集。为了证明定理，只须指出$supB$存在。设B^*为B的上界的集合。因（A，$\leqslant$）的最大元1在B^*中，故B^*非空。由条件（1）$infB^*$存在。但当$x \in B$时，对任意$y \in B^*$，必有$x \leqslant y$，即x是B^*的一个下界。从而，由$infB^*$的定义，对于任意$x \in B$，必有$x \leqslant infB^*$成立。于是$infB^* \in B^*$。$infB^*$是B的上界中最小者，故有$supB = infB^*$。

在（2）成立时，由对偶性可指出下确界存在。

定理2：在任意格中下述关系成立。其中各式的等号表示当各式的左端的值有定义时，右端的值也被定义，且两端的值相等。

（1）$a \cup (\bigcup_{i \in I} a_i) = \bigcup_{i \in I} (a \cup a_i)$，

（2）$a \cap (\bigcap_{i \in I} a_i) = \bigcap_{i \in I} (a \cap a_i)$，

（3）$(\bigcup_{i \in I} a_i) \cup (\bigcup_{i \in I} b_i) = \bigcup_{i \in I} (a_i \cup b_i)$，

（4）$(\bigcap_{i \in I} a_i) \cap (\bigcap_{i \in I} b_i = \bigcap_{i \in I} (a_i \cap b_i)$，

（5）$\bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I_j} a_i) = \bigcup_{i \in I} a_i$ 其中$\bigcup_{j \in J} I_j = I$，

（6）$\bigcap_{j \in J} (\bigcap_{i \in I_j} a_i) = \bigcap_{i \in I} a_i$ 其中$\bigcup_{j \in J} I_j = I$。

证明：因（2），（4），（6）为（1），（3），（5）的对偶式，故只须证明（1），（3），（5）即可。

（1）设$\bigcup_{i \in I} a_i$存在，令$b = \bigcup_{i \in I} a_i$，因$a_i \leqslant b$对所有$i \in I$

成立，故$a\cup a_i\leqslant a\cup b$对所有$i\in I$成立。于是$a\cup b$是$\{a\cup a_i: i\in I\}$的上界。设$c$为$\{a\cup a_i: i\in I\}$的上界，则$a\cup a_i\leqslant c$对于所有$i\in I$成立。由$a_i\leqslant a\cup a_i\leqslant c$和假定有$b\leqslant c$。又因$a\leqslant a\cup a_i\leqslant c$成立，故$a\cup b\leqslant c$。于是$\bigcup_{i\in I}(a\cup a_i)$存在且$a\cup(\bigcup_{i\in I}a_i)=a\cup b=\bigcup_{i\in I}(a\cup a_i)$成立。

（3）设$\bigcup_{i\in I}a_i$及$\bigcup_{i\in I}b_i$存在，分别设为a，b，对任意$i\in I$，$a_i\leqslant a$及$b_i\leqslant b$成立，故$a_i\cup b_i\leqslant a\cup b$。设$a_i\cup b_i\leqslant c$对所有$i\in I$成立，于是$a_i\leqslant c$，$b_i\leqslant c$对所有$i\in I$成立，故$a\leqslant c$及$b\leqslant c$成立。于是$a\cup b\leqslant c$。故$\bigcup_{i\in I}(a_i\cup b_i)$存在且$(\bigcup_{i\in I}a_i)\cup(\bigcup_{i\in I}b_i)=a\cup b=\bigcup_{i\in I}(a_i\cup b_i)$成立。

（5）假定$\bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j}a_i)$存在，则$\bigcup_{i\in I_j}a_i$存在。设其值为$b_j$，令$\bigcup_{j\in J}b_j$为$b$。对于任意$i\in I$，若$i\in I_j$，则$a_i\leqslant b_j\leqslant b$成立。设$a_i\leqslant c$对所有$i\in I$成立。于是对于$I_j$的任意元素$i$有$a_i\leqslant c$成立，故$b_j\leqslant c$对所有$j\in J$成立。于是$b\leqslant c$。故$\bigcup_{i\in I}a_i$存在且$\bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j}a_i)=b=\bigcup_{i\in I}a_i$成立。

定理3：在完备格中下述关系成立：

（1）$\bigcup_{i\in I}(a\cap b_i)\leqslant a\cap(\bigcup_{i\in I}b_i)$，

（2）$\bigcap_{i\in I}(a\cup b_i)\geqslant a\cup(\bigcap_{i\in I}b_i)$，

（3）$\bigcup_{f\in J^I}(\bigcap_{i\in I}a_{i\,f(i)})\leqslant\bigcap_{i\in I}(\bigcup_{j\in J}a_{ij})$，

（4）$\bigcap_{f\in J^I}(\bigcup_{i\in I}a_{i\,f(i)})\geqslant\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J}a_{ij})$。

其中J^I表示由集合I到集合J的映射全体的集合。

定理3的（1）（2）二式中将不等号换为等号时称为弱完全分配律(*weakcomplete distributive law*)；(3)，

（4）二式中将不等号换为等号时称为强完全分配律（*strong complete distributive law*）。

定理3的证明留给读者作为练习。

有理数集Q关于大小关系$\leqslant$不具有最小元和最大元，故（Q，$\leqslant$）不是完备格。将∞和$-\infty$作为Q的最大元及最小元添加到Q中也不是完备格。实际上，设$A=\{x: x^2<2, x\in Q\}$，在Q中$\sup A$不存在。实数可以看做是有序集（Q，$\leqslant$）的完备化。

在有序集（A，$\leqslant$）中，A的子集B在（A，$\leqslant$）中B的上界全体的集合记作B^*，下界全体的集合记作B_*。特别地，$\phi^*=\phi_*=A$成立。显然

若$B\subset C$，则$C^*\subset B^*$且$C_*\subset B_*$。

设$b\in B$，则对于B^*的任意元素x有$b\leqslant x$成立，而b为B^*的下界。从而$B\subset(B^*)_*$。同样地，有$B\subset(B_*)^*$。对于A的子集B，C有

$$B=C_* \text{及} \quad C=B^*$$

时，称（B，C）为A的切断。特别地对于$a\in A$，设$B=\{x: x\leqslant a\}$，$C=\{x: a\leqslant x\}$，则（B，C）是A的切断。设由

$$M=\{B:(B, B^*)\text{是}A\text{的切断}\}$$

确定集合M，M按集合的包含关系$\subset$可赋与顺序。特别地，因$A\in M$故有序集（M，$\subset$）有最大元。

由

$$\varphi(a)=\{x: x\leqslant a\}$$

确定A到M的映射φ。显然

$$a\leqslant b\Rightarrow\varphi(a)\subset\varphi(b)。$$

成立。反之，若$\varphi(a)\subset\varphi(b)$，则由$a\in\varphi(a)\subset\varphi(b)$

有 $a \leqslant b$ 成立。于是 φ 是保序单射。故（A，$\leqslant$）同构的嵌入有序集（M，$\subset$）。其次指出（M，$\subset$）是完备格。设 M' 为 M 的任意非空子集，设 $B_0 = \bigcap_{B \in M'} B$，对于 $B \in M'$，有 $B_0 \subset B$ 成立，故 $B^* \subset B_0{}^*$ 成立。于是 $(B^*{}_0)_* \subset (B^*)_*$。但 (B, B^*) 是切断故有 $(B^*)_* = B$。从而对于所有的 $B \in M'$ 有 $(B_0{}^*)_* \subset B$。故 $(B^*{}_0)_* \subset \bigcap_{B \in M'} B = B_0$ 成立。另方面 $B_0 \subset (B_0{}^*)_*$ 恒成立，故结局 $(B_0{}^*)_* = B_0$。故 $(B_0, B_0{}^*)$ 是一个切断。由定义显然 B_0 是 M' 的下确界。（M，$\subset$）具有最大元而且对于 M 的任意子集存在下确界，故由定理 1（M，$\subset$）是完备格。

最后指出映射 φ 在下述意义下保持 inf 及 sup，对于 A 的子集 B 及 A 的元素 a

（1）　$a = infB \Longleftrightarrow \varphi(a) = inf\{\varphi(b) : b \in B\}$，

（2）　$a = supB \Longleftrightarrow \varphi(a) = sup\{\varphi(b) : b \in B\}$。

因（2）是（1）的对偶，故只证明（1）。假定 $a = infB$，令

$$B_1 = inf\ \{\varphi(b) : b \in B\},$$

由上述证明，

$$B_1 = \bigcap_{b \in B} \{x : x \leqslant b\} = \{x : x \leqslant infB\}$$
$$= \{x : x \leqslant a\},$$

从而 $\varphi(a) = B_1 = inf\{\varphi(b) : b \in B\}$ 成立。反之，若

$$\varphi(a) = inf\ \{\varphi(b) : b \in B\}$$

成立，则由 $\{x : x \leqslant a\} = \bigcap_{b \in B} \{x : x \leqslant b\}$ 得到 $a = infB$。

由（1），（2）特别地当（A，$\leqslant$）为格时，φ 为保持格运算的映射。且当（A，$\leqslant$）若为完备格则 φ 为满射，而（A，$\leqslant$）和（M，$\subset$）是格同构的。集中上述事实，得

到下述定理。

定理4：对于任意有序集（A，$\leqslant$）由（A，$\leqslant$）到某完备格L必存在保序单射，保持inf及sup。

这个定理也指出任意格都是完备格的子格。

例：设（A，$\leqslant$）为完备格，φ为A到A的映射，满足

$$若\ x \leqslant y，则\ \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$$

时必存在某$a \in A$，使$\varphi(a) = a$（此种a称为φ的不动点）。

实际上，集合B由$B = \{x : \varphi(x) \leqslant x\}$确定。$A$的最大元1显然属于$B$，故$B$非空，于是$infB$存在。设$a = infB$，若$x \in B$则$a \leqslant x$成立，故$\varphi(a) \leqslant \varphi(x) \leqslant x$。从而$\varphi(a)$是$B$的下界。因$a$为$B$的最大下界，故$\varphi(a) \leqslant a$。由此得到$\varphi(\varphi(a)) \leqslant \varphi(a)$。但这意味着$\varphi(a) \in B$，因$a = inf\,B$故必须有$a \leqslant \varphi(a)$，于是$\varphi(a) = a$成立。

习　　题

1. 证明定理3。

2. 设A为任意集合，试证完备格（$p(A)$，$\cap$，$\cup$）中强完全分配律成立。

3. 在集合$\{a, b, c\}$中确定序关系为$\{(b, c)\}$，用定理4的方法求出完备格。

4. 在定理4的论述中，若（A，$\leqslant$）为全序集，则（M，$\subset$）亦为全序集。

5. 试讨论§1例1是否是完备格。

6. 设L为任意有序集，则必存在具有下述性质的完备格$\mathcal{L}$及L到$\mathcal{L}$的映射φ。

（1）φ是保序单射。

（2）对于$\mathcal{L}$的任意元ξ，存在L的子集X，Y，使

$$\xi = sup\varphi(X) = inf\varphi(Y)。$$

（3）设$\mathscr{L}'$为任意完备格，若φ'为L到$\mathscr{L}'$的任意保序单射，则存在到$\mathscr{L}'$的保序单射f，使 $\varphi'=f\circ\varphi$。

§3 模 格(modular lattice)

在本节中讨论模格的性质。

定理1：已予格是模格的要充条件是它不具有§1习题4形式的子格。

证明：必要性由§1习题4是显然的。为了证明充分性假定格不满足模律。于是由§1定理4之（3）存在x，y，z，使

$$z<x \text{ 且 } (x\cap y)\cup z<x\cap(y\cup z)$$

成立。这时该格必须含有§1习题4形式的子格。

定理2：在模格中，区间$[a, a\cup b]$和区间$[a\cap b, b]$是格同构的。

证明：对于$x\in[a, a\cup b]$，确定$f(x)=x\cap b$，则由

$$a\cap b\leqslant x\cap b\leqslant (a\cup b)\cap b=b,$$

f为$[a, a\cup b]$到$[a\cap b, b]$的映射。定义$g(x)=x\cup a$，同样，g为$[a\cap b, b]$到$[a, a\cup b]$的映射。因模律成立，故对于$x\in[a\cap b, b]$，有

$$f(g(x))=(x\cup a)\cap b=x\cup(a\cap b)=x。$$

同样的，对于$x\in[a, a\cup b]$得到$g(f(x))=x$，于是由双射定理f和g都是双射。今设x，$y\in[a, a\cup b]$且$x\leqslant y$。由$x\cap b\leqslant y\cap b$有$f(x)\leqslant f(y)$。反之，若$f(x)\leqslant f(y)$，则$f(x)\cup a\leqslant f(y)\cup a$。于是$x=g(f(x))\leqslant$

$g(f(y))=y$，故 f 为序同构映射。在此应用§1定理7，则 f 为格同构映射。

下述定理指出定理2的逆定理也成立。

定理3：对于格 L 的元素 a，b，映射 f_{ab}:$[a, a\cup b]\to[a\cap b, b]$ 及 g_{ab}:$[a\cap b, b]\to[a, a\cup b]$ 由 $f_{ab}(x)=x\cap b$，$g_{ab}(x)=x\cup a$ 确定。对于所有的 a，$b\in L$，f_{ab} 和 g_{ab} 若互为逆映射则格 L 为模格。

证明留给读者。

区间 $[a, b]$ 和区间 $[c, d]$ 是可互相转置的是指某 x，y 存在，使

(1) $a=x$，　$b=x\cup y$，　$c=x\cap y$，

$d=y$ 或

(2) $a=x\cap y$，　$b=y$，　$c=x$，

$d=x\cup y$

成立。其次区间 $[a, b]$ 和区间 $[c, d]$ 是等价的（*equivalent*）是指区间 $[x_i, y_i]$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ 存在，使 $a=x_1$，$b=y_1$，$c=x_k$，$d=y_k$，而且对于 $i=1$、$2\cdots$，$k-1$，$[x_i, y_i]$ 和 $[x_{i+1}, y_{i+1}]$ 可互相转置的而言。

模格 L 的元素列 a_1，$a_2\cdots$，a_k 满足 $a_i\leqslant a_{i+1}$ $(i=1, \cdots, k-1)$ 时，这个列 C 称为连结 a_1 和 a_k 的链（*chain*），以

$$C:\ a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$$

表示之。连结 a 和 b 的链

$$C:\ (a=)a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k(=b)$$

是连结 a 和 b 的另外的链

$$C':\ (a=)\ b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots b_l\ (=b)$$

的细分（*refinement*）是指各 b_i 等于某 a_j 而言。长度相等的

两个链

$$C:\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$$

和

$$C':\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_k$$

是等价的是指 $\{1, \cdots, k\}$ 到 $\{1, \cdots, k\}$的单射（即$\{1, 2, \cdots, k\}$上的置换）f存在，使$[a_i, a_{i+1}]$和$[b_{f(i)}, b_{f(i)+1}]$等价而言。对于各i当a_{i+1}是a_i的后继元（即a_i到a_{i+1}中间无元素）时，链C: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$称为组成列（composition chain）。

定理4（细分定理）：在模格中连结a和b的两个链具有互相等价的细分。

证明：设

$$C: a = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m = b$$

$$C': a = b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n = b$$

为连结a和b的任意两个链，确定a_{ij}及b_{ji}为

$$a_{ij} = a_i \cup (a_{i+1} \cap b_{j+1})$$

$(i = 1, 2, \cdots, m-1;\ j = 0, 1, \cdots, n-1)$

$$b_{ji} = b_j \cup (a_{i+1} \cap b_{j+1})$$

$(j = 1, 2, \cdots, n-1;\ i = 0, 1, \cdots, m-1)$。

由此定义显然有$a_{ij} \leqslant a_{i(j+1)}$及$b_{ji} \leqslant b_{j(i+1)}$成立。

另外下列二式成立。

$$\begin{aligned} a_{i(n-1)} &= a_i \cup (a_{i+1} \cap b) = a_{i+1} \\ &= a_{i+1} \cup (a_{i+2} \cap a) = a_{(i+1)0} \leqslant a_{(i+1)1}, \end{aligned}$$

$$b_{j(m-1)} = b_{j+1} = b_{(j+1)0} \leqslant b_{(j+1)1}\ 。$$

于是

$$D:\ (a =)\ a_{10} \leqslant a_{11} \leqslant a_{12} \leqslant \cdots \leqslant a_{1(n-1)}$$

$$\leqslant a_{21}\leqslant a_{22}\leqslant\cdots\leqslant a_{(m-1)(n-1)}=a_m\ (=b)。$$

$$D':\ (a=)\ b_{10}\leqslant b_{11}\leqslant b_{12}\leqslant\cdots\leqslant b_{1(m-1)}$$

$$\leqslant b_{21}\leqslant b_{22}\leqslant\cdots\leqslant b_{(n-1)(m-1)}=b_n\ (=b)。$$

分别是长度为 $(n-1)(m-1)+1$ 的 C 和 C' 的细分。

其次证明 $[a_{i(j-1)},\ a_{ij}]$ 和 $[b_{j(i-1)},\ b_{ji}]$ 是相互等价的。为此首先指出 $[a_{i(j-1)},\ a_{ij}]$ 和 $[(a_i\cup b_j)\cap a_{i+1}\cap b_{j+1},\ a_{i+1}\cap b_{j+1}]$ 是可互相转置的。令 $c=a_{i(j-1)}$，$d=a_{i+1}\cap b_{j+1}$，则有

$$\begin{aligned}c\cup d&=a_{i(j-1)}\cup(a_{i+1}\cap b_{j+1})\\&=a_i\cup(a_{i+1}\cap b_j)\cup(a_{i+1}\cap b_{j+1})\\&=a_i\cup(a_{i+1}\cap b_{j+1})\\&=a_{ij}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}c\cap d&=a_{i(j-1)}\cap a_{i+1}\cap b_{j+1}\\&=(a_i\cup(a_{i+1}\cap b_j))\cap a_{i+1}\cap b_{j+1}\\&=a_{i+1}\cap(a_i\cup b_j)\cap a_{i+1}\cap b_{j+1}\ (\text{由模律})\\&=(a_i\cup b_j)\cap a_{i+1}\cap b_{j+1}。\end{aligned}$$

故 $[a_{i(j-1)},\ a_{ij}]$ 与 $[(a_i\cup b_j)\cap a_{i+1}\cap b_{j+1},\ a_{i+1}\cap b_{j+1}]$ 可互相转置。同样的，可以指出 $[(a_i\cup b_j)\cap a_{i+1}\cap b_{j+1},\ a_{i+1}\cap b_{j+1}]$ 与 $[b_{j(i-1)},\ b_{ji}]$ 可互相转置。于是定理得证。

定理5：（*Jordan—Hölder*）设

$$C:(a=)\ a_1<a_2<\cdots<a_m\ (=b)$$

及

$$C':\ (a=)\ b_1<b_2<\cdots<b_n\ (=b)$$

为某模格的两个组成列。则 C 和 C' 是等价的。

证明：对于 C，C'，如定理 4 那样作成细分，

$$a_i \leqslant a_{i1} \leqslant a_{i2} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n-1)} = a_{i+1},$$

因a_{i+1}是a_i的后继元，故存在某个j，使

$$a_i = a_{i(j-1)} < a_{ij} = a_{i+1}。$$

但因区间$[a_{i(j-1)}, a_{ij}]$和区间$[b_{j(i-1)}, b_{ji}]$是等价的，故$b_{j(i-1)} < b_{ji}$必成立。但

$$b_j \leqslant b_{j1} \leqslant b_{j2} \leqslant \cdots \leqslant b_{j(m-1)} = b_{j+1},$$

而b_{j+1}是b_j的后继元。故$b_j = b_{j(i-1)}$，$b_{j+1} = b_{ji}$成立。于是$[a_i, a_{i+1}]$与$[b_j, b_{j+1}]$等价。对于各$i \in \{1, \cdots, m-1\}$，唯一确定如上的$j \in \{1, \cdots, n-1\}$，且反之，对于各$j \in \{1, \cdots, n-1\}$有某$i \in \{1, \cdots, m-1\}$对应之，从而$m = n$。由上述对应C和C'是等价的。

例 设G为群，设N为G的正规子群全体组成的集合。对于$A, B \in N$，令$A \cap B$为A和B做为集合的交，而$A \cup B$为AB，即定义为$\{ab: a \in A, b \in B\}$。试证明：

（a）若$A, B \in N$，则$A \cap B$，$A \cup B \in N$。

（b）（N，$\cap$，$\cup$）是格。

（c）（N，$\cap$，$\cup$）满足模律。

实际上，（a）显然有$A \cap B \in N$。设$a, a' \in A$，$b, b' \in B$。$ab(a'b')^{-1} = abb'^{-1}a'^{-1}$。但$bb'^{-1} \in B$，因$B$为正规子群，故有某个$b_1 \in B$使$bb'^{-1}a'^{-1} = a'^{-1}b_1$，从而$ab(a'b')^{-1} = aa'^{-1}b_1 \in A \cup B$。故$A \cup B$为$G$的子群。对于任意$g \in G$，$g(A \cup B)g^{-1} = g(AB)g^{-1} = gAg^{-1} \cdot gBg^{-1} = AB = A \cup B$，于是$A \cup B \in N$。

（b）留给读者证之。

（c）当$A \subset B$时，只须说明

$$AC \cap B = (A \cup C) \cap B \subset A \cup (C \cap B)$$
$$= A(C \cap B)$$

即可。设$b\in AC\cap B$，则$b\in B$且存在某$a\in A$，$c\in C$使$b=ac$。由$a^{-1}\in A\subset B$，$b\in B$有$c=a^{-1}b\in B$。于是$c\in C\cap B$，故$b=ac\in A(C\cap B)$。

习　　题

1. 试证定理3。

2. 模格的对偶格、子格、直积格仍为模格。

3. 格L是模格的要充条件是对任意$a\geqslant b$及任一个c有$a\cup c=b\cup c$，$a\cap c=b\cap c$时可推得$a=b$。

4. 在模格L中，可互相置换的二区间$[a,b]$和$[c,d]$，若b是a的后继元，则d也是c的后继元。

5. 在模格中，$a<b$，有连结a和b的组成列，若x为$a<x<b$的任一元素，则可作出一个含x的组成列，即有组成列

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i=x<\cdots<x_n=b。$$

§4　分配格(distributive lattice)

由§1定理5知分配格是模格，但模格未必是分配格。下述定理给出分配格的条件。

定理1：模格L为分配格的要充条件是L不具有§1习题5形式的子格。

证明：必要性是明显的。假设L不满足分配律，因

$$(x\cap y)\cup(y\cap z)\cup(z\cap x)\leqslant(x\cup y)\cap(y\cup z)\cap(z\cup x)$$

恒成立，故由§1习题7的(1′)，对于某个x，y，$z\in L$，有

$$(x\cap y)\cup(y\cap z)\cup(z\cap x) < (x\cup y)\cap(y\cup z)\cap(z\cup x)$$

成立。在此式中令左端为a右端为b。再设

$$c=(b\cap x)\cup a,\qquad d=(b\cap y)\cup a,$$
$$e=(b\cap z)\cup a,$$

用

$$b\cap x=(x\cup y)\cap(z\cup x)\cap x\cap(y\cup z)$$
$$=x\cap(y\cup z)$$

及

$$b\cap y=y\cap(z\cup x)$$

得到

$$c\cup d=(b\cap x)\cup a\cup(b\cap y)\cup a$$
$$=(x\cap(y\cup z))\cup(y\cap(z\cup x))\cup a。$$

再对上式右端的a，使用关系，

$$x\cap y,\qquad z\cap x\leqslant x\cap(y\cup z)\text{ 及}$$
$$y\cap z\leqslant y\cap(z\cup x)$$

得到

$$c\cup d=(x\cap(y\cup z))\cup(y\cap(z\cup x))。$$

在此因

$$x\cap(y\cup z)\leqslant x\leqslant z\cup x,$$

使用模律，则右端为

$$((x\cap(y\cup z))\cup y)\cap(z\cup x)。$$

再应用模律，因$y\leqslant y\cup z$，有

$$(x\cup y)\cap(y\cup z)\cap(z\cup x),$$

于是$c\cup d=b$。同样得到$d\cup e=b$，$e\cup c=b$，着眼于对偶性，与现在完全同样的讨论得到

$$c\cap d=a,\qquad d\cap e=a,\qquad e\cap c=a。$$

c、d、e 之间大小关系不成立，结局 L 具有§1 习题5那样的子格。

例1：在定理1的证明中补充证明 $c \leqslant d$ 不能成立。

实际上，若 $c \leqslant d$，则 $d = c \cup d = b$。从而得到 $e \leqslant e \cup c = b = d$。故 $e = d \cap e = a$，因 $a \leqslant c$ 得 $c = a \cup c = e \cup c = b$，但 $a = c \cap d = b$ 与 $a < b$ 矛盾，故 $c \leqslant d$ 不能成立。

对于集合 A 作成的格 $(p(A), \cap, \cup)$ 是分配格，但反之任意的分配格是否可以表示为这种形式的格？对于这个问题，下例给出否定的回答。

如3个元素 a，0，1的集，序关系为 $\{(0, a), (0, 1), (a, 1)\}$。但 n 个元素组成的集合 A，$p(A)$ 的元素个数为 2^n，不能为3。

如前所述 $(p(A), \cap, \cup)$ 形的格的子格称为**集格**。对于上述问题如定理3所指出那样，得到任意分配格可表为集格的答案。在证明此结果之前，先做一些准备。

对于格 L 的非空子集 F，当

$$x \cap y \in F \Longleftrightarrow x \in F \text{ 且 } y \in F$$

成立时，F 称为 L 的**滤子**（或对偶理想）。L 本身是 L 的一个滤子。又当 $a \in L$ 时，集合 $\{x : a \leqslant x\}$ 是滤子（和滤子对偶的概念称为理想）。

和 L 不同的滤子中按包含关系的极大者称为**极大滤子**。另外，在和 L 不同的滤子中

$$\text{若 } x \cup y \in F \text{，则 } x \in F \text{ 或 } y \in F$$

成立时，F 称为**质滤子**。

例2：在具有最小元的分配格中极大滤子必是质滤子。

实际上，设 F 为具有最小元的分配格 L 的极大滤子。假

定 $a\cup b\in F$ 且 $a\notin F$，今证明 $b\in F$。

首先令 $F'=\{x: a\cup x\in F\}$，则 F' 是滤子。实际上，当 x，$y\in F'$ 时，则 $a\cup x$，$a\cup y\in F$。因 F 是滤子，故 $(a\cup x)\cap(a\cup y)\in F$。应用分配律，得到 $a\cup(x\cap y)\in F$。从而有 $x\cap y\in F'$。其次假定 $x\in F'$ 且 $x\leqslant y$，则 $a\cup x\in F$ 及 $a\cup x\leqslant a\cup y$ 成立，故 $a\cup y\in F$。于是 $y\in F'$。故 F' 为滤子。

但若 $x\in F$，则由 $x\leqslant a\cup x$ 有 $a\cup x\in F$。于是 $x\in F'$。故 $F\subset F'$。设 L 的最小元为 0，则 $a\cup 0=a\notin F$。故 $0\notin F'$。故 F' 是 L 的真子集。但因 F 是极大滤子故必须有 $F'=F$。由假定因 $a\cup b\in F$，故 $b\in F'=F$ 成立。

定理2：在分配格 L 中，假定 a，$b\in L$ 且 $a<b$。则 L 有质滤子 F 使 $a\notin F$ 而 $b\in F$。

证明：令 $A=\{x: x\in L$ 且 $a\leqslant x\}$，则格 $L'=(A,\cap,\cup)$ 为具有最小元 a 的 L 的子格。设 $\mathcal{U}$ 为含有 b 和 L' 不同的 L' 的滤子全体的集合，集合 $\{x: b\leqslant x\}$ 显然属于 $\mathcal{U}$，从而 $\mathcal{U}$ 是非空的。$\mathcal{U}$ 的元素按包含关系赋予序，则 $(\mathcal{U},\subset)$ 是归纳的序集。

实际上，设 $\{G_i: i\in I\}$ 为 $\mathcal{U}$ 的任意全序子集，$G=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$。则 G 为含有 b 的 L' 的滤子，因 $a\notin G$ 故与 L' 相异。于是 $G\in\mathcal{U}$。故由 Zorn 引理在 $\mathcal{U}$ 有极大滤子 F_0 存在。显然 $a\notin F_0$ 且 $b\in F_0$。又由例 2 F_0 是质的（不知 F_0 是否是 L 的质滤子）。在此，令 $F=\{x: a\cup x\in F_0\}$，则 $a\notin F$ 且 $b\in F$。显然 F 是 L 的滤子。今证明 F 是质的。设 $x\cup y\in F$，由 F 的定义有 $a\cup(x\cup y)=(a\cup x)\cup(a\cup y)\in F_0$，因 $a\cup x$ 及 $a\cup y$ 是 L' 的元素，F_0 是 L' 的质滤子，故 $a\cup x\in F_0$ 或 $a\cup y\in F_0$，于是 $x\in F$ 或 $y\in F$

成立。

定理3：任意分配格必格同构于某个集格。

证明：设$\mathfrak{M}$为分配格L的质滤子全体的集合，由格L到集格（$p(\mathfrak{M})$，$\cap$，$\cup$）的映射θ定义如下：

$$\theta(x)=\{F:\ x\in F\text{且}F\in\mathfrak{M}\}。$$

于是

(1) $\theta(x\cap y)=\theta(x)\cap\theta(y)$，

(2) $\theta(x\cup y)=\theta(x)\cup\theta(y)$

成立。

实际上，（1）式是

$$\begin{aligned}F\in\theta(x\cap y)&\Longleftrightarrow x\cap y\in F\\&\Longleftrightarrow x\in F\text{且}y\in F\\&\Longleftrightarrow F\in\theta(x)\text{且}F\in\theta(y)\\&\Longleftrightarrow F\in\theta(x)\cap\theta(y)。\end{aligned}$$

（2）式也由质滤子的性质同样导出。根据（1），（2），L在θ之下的像（$\theta(L)$，$\cap$，$\cup$）是（$p(\mathfrak{M})$，$\cap$，$\cup$）的子格。

当$x\neq y$时，$x\cap y<x\cup y$，于是由定理2和上述的（1）和（2）有

$$\theta(x)\cap\theta(y)=\theta(x\cap y)\leqslant\theta(x\cup y)$$
$$=\theta(x)\cup\theta(y)，$$

故不能有$\theta(x)=\theta(y)$。即θ为单射。由此L格同构于格（$p(\mathfrak{M})$，$\cap$，$\cup$）的某子格。

例3：在集$L=\{0,\ a,\ 1\}$中按序关系$\{(0,\ a),(0,\ 1),(a,\ 1)\}$是格。在此格中质滤子为$\{1\}$及$\{a,1\}$。设$A=\{1\}$，$B=\{a,\ 1\}$，$\mathfrak{M}=\{A,\ B\}$，则到格$\{p(\mathfrak{M})$，$\cap$，$\cup\}$上由定理3定义的$\theta$为$\theta(0)=\phi$，

$\theta(a)=\{B\}$，$\theta(1)=\{A, B\}=\mathfrak{M}$。这时子格 $(\{\theta(0), \theta(a), \theta(1)\}, \cap, \cup)$ 格同构于格L。

例4：如定理 3 定义L和$\mathfrak{M}$。设C为使

$$F\in\mathfrak{N} \text{ 且 } F\subset G\Rightarrow G\in\mathfrak{N}$$

成立的$\mathfrak{M}$的子集N全体的集合，于是容易确定$(C, \cap, \cup)$是$(p(\mathfrak{M}), \cap, \cup)$的子格。若$L$为有限分配格，则定理 3 中定义的映射$\theta$是由$L$到集格$(C, \cap, \cup)$的构同构映射。试证明之。

实际上，设$F\in\theta(x)$且$F\subset G$，则$x\in F\subset G$。于是$G\in\theta(x)$。从而θ是L到C的映射。今指出θ是满射。

假定$\mathfrak{N}\in C$，因L是有限的，故$\mathfrak{M}$及$\mathfrak{N}$都是有限集。设$\mathfrak{N}=\{F_1, \cdots\cdots, F_k\}$，因各$F_i$是$L$的有限子格，故在$F_i$有最小元$a_i$存在。设$b=a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_k$，则$\mathfrak{N}=\theta(b)$。由$a_i\in F_i$且$a_i\leqslant b$有$b\in F_i$，于是$\mathfrak{N}\subset\theta(b)$。反之，设$F\in\theta(b)$则$b\in F$，但$F$是质的，故存在某$a_i$，使$a_i\in F$。但若$x\in F_i$，则因$a_i\leqslant x$，故$x\in F$。于是$F_i\subset F$成立，因$F_i\in\mathfrak{N}$，由$\mathfrak{N}$的性质得到$F\in\mathfrak{N}$。故$\theta(b)\subset\mathfrak{N}$。

习题

1. 分配格的对偶格、子格、直积格都是分配格。

2. 试证§1 习题 7 中分配律成立与（2′）成立等价。

3. 试证：有限格的滤子具有最小元。

4. 格L的子格 J 是对偶滤子的要充条件是若$a\in J$，则对任意的$b\in L$，有$a\cap b\in J$。

5. 在如图表示的格中，试举出全部质滤子，并指出其中极大者。

6. 分配律可以表述如下：设x为L的一个任意的确定元素，对

于$v\in L$使之对应于$v\cup x$或$v\cap x$的映射都是L到L的同态映射。

7. 试证格L是全序集的要充条件是L的任意滤子是质滤子。

8. F是滤子的要充条件是若$x\in F$且$y\in F$，则$x\cap y\in F$及若$x\in F$且$x\leqslant y$则$y\in F$二者皆成立。试证明之。

9. 格L的子集J是质滤子的要充条件是L—J是对偶质滤子。

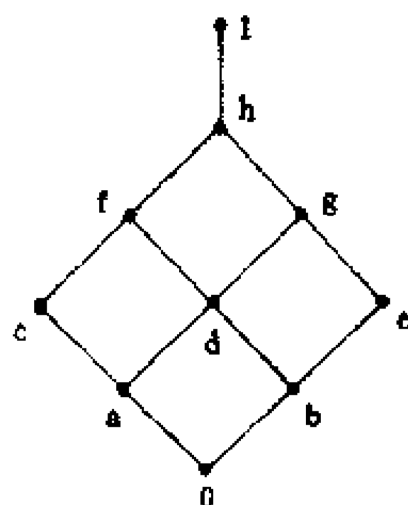


图 2

§5 Boole 代数(Boolean algebras)

在§1中已指出所谓*Boole*代数是分配律成立的相补格。于是在赋予*Boole*代数的特征时，在格运算之外取补元的运算$'$及格的最小元0，最大元1明确标记是必要的。于是*Boole*代数可用（B，$\cap$，$\cup$，$'$ 0，1）表示之。和格的情形一样，在*Boole*代数B＝（B，$\cap$，$\cup$，$'$ 0，1）中B和B不加区别，经常混用。

对于集合A作成的（$p(A)$，$\cap$，$\cup$，$\mathscr{C}$，ϕ，A）是*Boole*代数的代表的例子。当$A=\phi$时，$p(A)=\{\phi\}$。这个*Boole*代数仅由一个元素组成。我们经常讨论的是最小元0和最大元1是相异的*Boole*代数。

定理1：在*Boole*代数中，

$$(x\cap y)'=x'\cup y'\text{及}\ (x\cup y)'=x'\cap y'$$

成立（*Boole*代数中的*Morgan*法则）。

证明，因补元是唯一确定的，（参见§1习题8）为了证

明

$$(x \cap y)' = x' \cup y',$$

只须证明

(1) $(x \cap y) \cap (x' \cup y') = 0$,

(2) $(x \cap y) \cup (x' \cup y') = 1$。

应用分配律

$$(x \cap y) \cap (x' \cup y') = (x \cap y \cap x') \cup (x \cap y \cap y') = (0 \cap y) \cup (x \cap 0) = 0。$$

又

$$(x \cap y) \cup (x' \cup y') = (x \cup x' \cup y') \cap (y \cup x' \cup y') = (1 \cup y') \cap (1 \cup x') = 1$$

于是(1),(2)成立。第二式同样可以证明。

例1：试证在Boole代数中下述关系成立：

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow y' \leqslant x'。$$

实际上，由§1叙述的事实及定理1有

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x \cap y = x \Longleftrightarrow (x \cap y)' = x' \Longleftrightarrow x' \cup y' = x' \Longleftrightarrow y' \leqslant x'。$$

对应子格的概念，可以定义已予Boole代数的子Boole代数的概念。

例2：在Boole代数 $B = (B, \cap, \cup, ', 0, 1)$ 中，设 a，$b \in B$ 且 $a < b$。令 $[a, b] = \{x : x \in B \text{ 且 } a \leqslant x \leqslant b\}$，试指出 $C = ([a, b], \cap, \cup, ^*, a, b)$ 也是

$Boole$代数。其中对于$x\in[a, b]$定义$x^*=b\cap(x'\cup a)$。

实际上，由§1，例3知$([a, b], \cap, \cup)$是格（分配），今证明C为其相补格。对于$x\in[a, b]$

$$x\cap x^*=x\cap b\cap(x'\cup a)$$
$$=x\cap(x'\cup a)$$
$$=(x\cap x')\cup(x\cap a)$$
$$=0\cup a=a$$

另外，

$$x\cup x^*=x\cup(b\cap(x'\cup a))$$
$$=(x\cup b)\cap(x\cup(x'\cup a))$$
$$=b\cap 1=b$$

故C为$Boole$代数。

这个例子是$Boole$代数的子格仍是$Boole$代数。但此例中在子格取补元的运算和原来$Boole$代数中的运算是相异的。在此，$Boole$代数B的子格C是$Boole$代数，而且B和C取补元的运算一致时称C为B的子Boole代数。（*Boolean subalgebra*）。这时

若$a, b\in C$　则$a\cap b\in C$

若$a, b\in C$　则$a\cup b\in C$

若$a\in C$　则$a'\in C$

成立（其中$\cap$，$\cup$，$'$是关于B的$Boole$代数的运算）。由这三个运算推得。$0=a\cap a'\in C$，$1=a\cup a'\in C$成立，故C的最小元，最大元分别和B的最小元，最大元一致。特别的，$B_0=(\{0, 1\}, \cap, \cup, ', 0, 1)$是$B$的子$Boole$代数，称为$B$的平凡子Boole代数（*trivial Boolean subalgebra*）。

对于二$Boole$代数$B=(B,\cap,\cup,',0,1)$，$C=(C,\cap^*,\cup^*,{}^\circ,0^*,1^*)$，由$B$到$C$的映射$\varphi$是**Boole同态映射**（*Boolean homomorphic mapping*）是指φ是格同态映射而且对所有$x\in B$，$\varphi(x')=\varphi(x)^\circ$成立。特别的当$\varphi$为双射时，$\varphi$称为**Boole同构映射**。(*Boolean isomorphic mapping*)。当B到C的$Boole$同构映射存在时B和C称为**Boole同构**（*Boolean isomorphism*）。

定理2：$Boole$代数间的双射是$Boole$同构映射的要充条件是φ是序同构映射。

证明：由§1定理7，若$\varphi:B\to C$是格同构映射，则指出$\varphi(x')=\varphi(x)^\circ$成立即可。首先指出$\varphi(1)=1^*$及$\varphi(0)=0^*$。对于$x\in B$，因$x\cap 1=x$成立，故

$$\varphi(x)\cap^*\varphi(1)=\varphi(x\cap 1)=\varphi(x),$$

于是$\varphi(x)\leqslant\varphi(1)$对所有$x\in B$成立。但因$\varphi$为双射，故$\varphi(1)$为$C$的最大元，于是$\varphi(1)=1^*$。由对偶性指出$\varphi(0)=0^*$。于是由$x\cup x'=1$及$x\cap x'=0$得到

$$\begin{aligned}\varphi(x)\cup^*\varphi(x')&=\varphi(x\cup x')\\&=\varphi(1)=1^*,\\\varphi(x)\cap^*\varphi(x')&=\varphi(x\cap x')\\&=\varphi(0)=0^*.\end{aligned}$$

因$\varphi(x)$的补元是唯一确定的，故$\varphi(x)^\circ=\varphi(x')$成立。

习　　题

1. 在$Boole$代数中，试证

   $0'=1$，$1'=0$，$(x')'=x$

成立。

2. 在 Boole 代数中，试证

$$x\leqslant y \Longleftrightarrow x\cap y'=0 \Longleftrightarrow x'\cup y=1$$

成立。

3. 设L为Boole代数，a，$b\in L$，$a\leqslant b$。若$x\in[a, b]$，则有唯一的$y\in[a, b]$，满足

$$x\cap y=a,\quad x\cup y=b。$$

4. 设Boole代数B的子集A含有0及1，关于格运算$\cap$，$\cup$是封闭的，这时A是B的子Boole代数吗？

5. 在Boole代数中定义二项运算$a\oplus b$为$(a\cap b')\cup(a'\cap b)$，试证下列诸式成立：

$$a\oplus b=b\oplus a,\quad a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c,$$

$$a\oplus a=0,\quad a\oplus a'=1,\quad a\oplus 1=a',\quad a\oplus 0=a,$$

第七章　代数系(algebraic system)

§1　代数运算　(algebraic operation)

本章对代数系做概括的介绍，最后以现代数学中非常有用的范畴和函子的概念做结束。

在自然数集合中可以进行加法和乘法的运算，将这一概念一般化，有

定义1：在非空集A中，规定一个法则α，使A中任意一对有次序的元素a，b，根据规定的法则α，在A内有且仅有一个元素c与之对应，这时，将法则α称为A 内的代数运算，而c称为a与b的对应元。以α（a，b，c）或$a\ \alpha\ b = c$表示之，如不致发生误会可简写为$a\ b = c$。

可见A内的代数运算实际上是A内的一个三元关系。

由定义也可看出A内的代数运算实际是$A \times A$到A的一个映射。故定义 1 可改述为

定义1′、设A为非空集，$A \times A$到A的映射α称为A内的代数运算或A的内部运算（*inner operation*）

一般的，我们还有

定义2，设Ω，A为非空集，$\Omega \times A$到A的映射ω称为A的外部运算（*exterior operation*），当（x，a）$\in \Omega \times A$时，将ω（x，a）写做$x\ \omega\ a$。Ω称为ω的作用域，在不致发生误解时，可写作$x\ a$。

内部运算及外部运算的概念不仅可以定义在积空间上，

也可以定义在积空间的子集上。

例1：在集合A的幂集$p(A)$中，集合的并，交，差，对称差等，都是$p(A)$的内部运算。

例2：设$A=\{a, b, c\}$，规定α为

$$a\,\alpha\,a=b,\quad a\,\alpha\,b=c,\quad a\,\alpha\,c=a,$$
$$b\,\alpha\,a=a,\quad b\,\alpha\,b=c,\quad b\,\alpha\,c=a,$$
$$c\,\alpha\,a=a,\quad c\,\alpha\,b=c,\quad c\,\alpha\,c=b,$$

显然α是A的内部运算，这个映射常以下表表出

α	a	b	c
a	b	c	a
b	a	c	a
c	a	c	b

这个表称为乘法表（*product table*），其规则α是竖线左侧的元素与横线上侧的元素对应着其交差点处的元素。

有限集的内部运算都可以用这种表表示出来。

例3：格运算$\cap$、$\cup$是格的内部运算。

定义3：A的内部运算α，若对于A内任二元素a，b恒有

$$a\,\alpha\,b=b\,\alpha\,a$$

时，称α满足交换律（*commutative law*）。

若对于A的任意三个元素a，b，c，恒有

$$(a\,\alpha\,b)\,\alpha\,c=a\,\alpha\,(b\,\alpha\,c)$$

时，称α满足结合律（*associative law*）。

例1中$p(A)$的并、交、差、对称差等运算都满足交换

律和结合律。

例 3 中格的∩，∪运算也都满足交换律和结合律。

例 2 不满足交换律，如 $a\,\alpha\,b = c$ 而 $b\,\alpha\,a = a$；也不满足结合律，如 $a\,\alpha\,(a\,\alpha\,a) = c$ 而 $(a\,\alpha\,a)\alpha\,a = a$。

例4： 数的减法是确定在整数集内的代数运算。但不满足交换律和结合律。

例5： 数的除法不是确定在整数集内的代数运算。

例6： n 阶方阵的乘法，是在数域 P 上 n 阶方阵集合 A 内的内部运算，它满足结合律但不满足交换律。而 n 阶方阵的加法也是 A 的内部运算，它满足交换律和结合律。

例7： $P \times A \to A$ 按通常的数字乘法是 A 的外部运算。

例8： 在四级置换集合中，继续施行两个置换做为代数运算，是置换集合中的内部运算，满足结合律但不满足交换律。

例9： 在 $A = \{a, b, c\}$ 中，令 α 为

α	a	b	c
a	a	c	b
b	c	a	a
c	b	a	a

则 α 为 A 的内部运算，满足交换律，但不满足结合律。

定义4： 非空集合 A 中有两个内部运算 α，β。若对于任意三个元素 a，b，c 恒有

$$a\,\alpha\,(b\,\beta\,c) = (a\,\alpha\,b)\,\beta\,(a\,\alpha\,c)$$

则称 α，β **满足左分配律**，若恒有

$$(b\beta c)\alpha a=(b\alpha a)\beta(c\alpha a)$$

则称α，β满足右分配律。若两式都成立，则称α，β满足分配律（*distributive law*）。

如：例1中集的并、交运算满足分配律。

例3中格的运算$\cap$、$\cup$满足分配律。

例6中n阶方阵的乘法、加法，满足分配律。

在$\{a, b, c\}$中的例2的运算为α，以例9的运算为β不满足分配律。如

$$b\alpha(c\beta b)=b\alpha a=a,$$
$$(b\alpha c)\beta(b\alpha b)=a\beta c=b,$$

故

$$b\alpha(c\beta b)\neq(b\alpha c)\beta(b\alpha b)。$$

又

$$(b\beta a)\alpha c=c\alpha c=b,$$
$$(b\alpha c)\beta(a\alpha c)=a\beta a=a,$$

故

$$(b\beta a)\alpha c\neq(b\alpha c)\beta(a\alpha c)。$$

即左，右分配律都不成立。

定义5：设α为集合A的内部运算，若满足结合律，则称A关于α为半群（*semigroup*）。

定义6：设α为集G的内部运算，若满足

（1）结合律成立，

（2）有$e\in G$，对于任何元素$a\in G$，恒有

$$a\alpha e=a。$$

称e为G的单位元。

（3）设e为G的单位元，对于任何元素$a\in G$，有元素$a'\in G$，使

$$a\,\alpha\,a' = e。$$

称a'为a的逆元。

这时称G关于α为群。若α满足交换律，则称G关于α为交换群或Abel 群，以纪念第一个研究这种群的挪威数学家$Abel$。

当群G的子集H，关于α也构成群时，称H为G的子群（$subgroup$）。

例 6 中数域P上的n阶方阵的集合关于内部运算加法，是$Abel$群。

例 8 中n级置换的集合关于该运算是不可换群。

定义 6：设α，β为集合R的两个内部运算，若满足

（1）R关于β是$Abel$群，

（2）R关于α满足结合律，

（3）R关于α，β满足分配律。

则R称为环（$ring$）。

当R关于α满足交换律时，R称为可换环（$commutative\ ring$）。

当R的子集H关于α，β也构成环时，称H为R的子环（$subring$）。

定义7：设α，β为集合R的两个内部运算，若满足

（1）R关于β是$Abel$群，

（2）设 0 为β的单位元，$R\setminus\{0\}$关于α是群，

（3）R关于α，β分配律成立。

则称R是体。

当R关于α满足交换律时，R称为域（$field$）。

当R的子集H，关于α，β也构成域时，称H为R的子域（$subfield$）。

例6 关于方阵的加法和乘法是环。

整数集关于加法、乘法运算是环。

有理数集关于加法、乘法是域。

定义8： 设A，A'为非空集，α_1，α_2，…，α_n为A的内部运算，α'_1，α'_2，…，α'_n为A'的内部运算，φ为A到A'上的映射，若对于A的任二元素a，b，恒有

$$\varphi(a\alpha_i b)=\varphi(a)\alpha'_i\varphi(b)$$

成立时，称φ为A与A'间关于（α_1，…，α_n，α'_1，…，α'_n）的同态映射（*homomorphic mapping*）。

当φ为双射时，称φ为同构映射（*isomorphic mapping*）。

§2 代数系(algebraic system)

将§1诸概念推广，设A为集合。

设给与$A\times A$的子集M_α，M_β，…，及映射α：$M_\alpha\to A$，β：$M_\beta\to A$…。当（a，b）$\in M_\alpha$时，α（a，b）写做$a\alpha b$，（c，d）$\subset M_\beta$时β（c，d）写做$c\beta d$…，α，β，…，称为A中的运算，或内部运算（*inner operation*）。

设给与A及集合Ω，Θ，…，$\Omega\times A$的子集L_ω，$\Theta\times A$的子集L_θ…，以及映射ω：$L_\omega\to A$，θ：$L_\theta\to A$。当（x，a）$\in L_\omega$时，将ω（x，a）写做$x\omega a$（或根据情况写做$a\omega x$）。当（y，b）$\in L_\theta$时，$y\theta b$（或$b\theta y$）也具有同样的意义。w，θ，…称为A的外部运算（*exterior operation*）。Ω，Θ，…，分别称为ω，θ，…的作用域，

而Ω，Θ的元素分别称为这些外部运算的作用子。

在集合A中给与这样的内部运算α，β，…，及外部运算ω，θ，…，时，A和这些算法一并的概念$\mathfrak{A}$称为代数系，A称为$\mathfrak{A}$的支集（*support*），$\{\alpha, \beta, \cdots,\}$，$\{\omega, \theta, \cdots,\}$分别称为$\mathfrak{A}$的内部运算系，外部运算系，写做

$$\mathfrak{A}=(A, \{\alpha, \beta, \cdots\cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\cdots\})。$$

在不致发生混乱的情况下，也称之为代数系A。具有内部运算系$\{\alpha, \beta, \cdots\}$外部运算系$\{\omega, \theta, \cdots\}$的代数系称为$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$类代数系。（$\{\alpha, \beta, \cdots\}$或$\{\omega, \theta, \cdots\}$可以是空集）。

在两个代数系$\mathfrak{A}=(A, \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$，$\mathfrak{A}^*=(A^*, \{\alpha^*, \beta^*, \cdots\}, \{\omega^*, \theta^*, \cdots,\})$间，能确定$\{\alpha, \beta, \cdots\}$到$\{\alpha^*, \beta^*, \cdots\}$的双射$\sigma$（$\sigma(\alpha)=\alpha^*$，$\sigma(\beta)=\beta^*$，…），及$\{\omega, \theta, \cdots\}$到$\{\omega^*, \theta^*, \cdots\}$的双射$\tau$（$\tau(\omega)=\omega^*$，$\tau(\theta)=\theta^*$，…）时称为$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{A}^*$为同类的。当$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}^*$为同类时，分别将$\alpha$与$\alpha^*$，$\beta$与$\beta^*$，…，$\omega$与$\omega^*$，$\theta$与$\theta^*$，…看作是同一的，经常用同一记号表示之。

设$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}^*$是同类的，ω与ω^*，θ与θ^*，…，分别看做是相同的，若ω，θ，…，在$\mathfrak{A}$中及在$\mathfrak{A}^*$中分别具有相同的作用域Ω，Θ，…，则$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}^*$称为（Ω，Θ，…）作用同类。

具有一定的内部运算系$\{\alpha, \beta, \cdots\}$，外部运算系$\{\omega, \theta, \cdots\}$的$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$类代数系之中关于这些运算满足某个法则系$C$（例如结合律，交换律，分配律等）称为$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\}, C)$种代数系。例如在$\alpha$系中关于运算$\alpha$满足结合律为$C_1$，

关于运算α有单位元及逆元存在，以及满足C_1为C_2，再关于运算α满足C_2及交换律为C_3，则（$\{\alpha\}$，C_1），（$\{\alpha\}$，C_2），（$\{\alpha\}$，C_3）等各种代数系分别为半群，群，可换群。另外，在内部运算α之外导入一个外部运算ω，满足ω关于α的分配律$x\omega(a\alpha b)=(x\omega a)\alpha(x\omega b)$及$C_2$者为$C_4$，则（$\{\alpha\}$，$\{\omega\}$，$C_4$）种代数系是具有作用域的群。

当给与$\{\alpha, \beta, \cdots\}$，$\{\omega, \theta, \cdots\}$及$C$时，（$\{\alpha, \beta, \cdots\}$，$\{\omega, \theta, \cdots\}$，$C$）种的两个代数系称为同种的，同种且作用同类的代数系称为**作用同种的**。例如具有作用域的群全是同种的，其中具有同一作用域Ω的一Ω群是作用同种的。

同类，作用同类，同种，作用同种之关系显然都是代数系间的等价关系。

在上面一般的α的定义域$M_\alpha \subset A\times A$，$\omega$的定义域$L_\omega \subset \Omega\times A$，特别的，若$M_\alpha = A\times A$，$L_\omega = \Omega\times A$，则$\alpha$，$\omega$分别称为**到处定义的内部运算或外部运算**。例如域上的加法及乘法是到处定义的而除法不是。下面提到运算都是指到处定义而言。

当α为A的内部运算时，对于A_1，$A_2\subset A$，$\{a_1\alpha a_2 : a_1\in A_1, a_2\in A_2\}$记作$A_1\alpha A_2$。若$A_1\alpha A_1\subset A_1$，则称$A_1$对于算法$\alpha$是封闭的。这时若$\alpha$在$A_1\times A_1$的限制为$\alpha_1$，则$\alpha_1$可看作是$A_1$的内部运算，$\alpha_1$称为由$\alpha$诱导的$A_1$的内部运算。通常用同一文字$\alpha$表示之。

ω为A的一个外部运算，其作用域设为Ω时，对于$A_1\subset A$，$\Omega_1\subset\Omega$，$\{x_1\omega a_1 : x_1\in\Omega_1, a_1\in A_1\}$记作$\Omega_1\omega A_1$。当$\Omega\omega A_1\subset A_1$时，称为$A_1$对于$\omega$是封闭的。

这时和上面同样的意义下，显然可由ω诱导出A_1的外部运算ω_1（作用域同前Ω）。ω_1通常也用ω表示。

代数系$\mathfrak{A}=(A, \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$，$A$的子集$A_1$若对于所有内部运算$\alpha$，$\beta$，…，外部运算$\omega$，$\theta$，…，都是封闭的，则代数系$\mathfrak{A}_1=(A_1, \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\},)$称为$\mathfrak{A}$的**子系**。当将$\mathfrak{A}$略写为代数系$A$时，$\mathfrak{A}_1$也略写为$A_1$。

某代数系$\mathfrak{A}$的子系$\mathfrak{A}_1$显然是和$\mathfrak{A}$作用同类的代数系，当$\mathfrak{A}$是$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\}, C)$种的代数系时，$\mathfrak{A}_1$未必是和$\mathfrak{A}$同种的代数系。例如以$\alpha$为运算的群$\mathfrak{A}$是$(\{\alpha\}, C_2)$种代数系，但$\mathfrak{A}$的子系$\mathfrak{A}_1$一般是半群，而未必是群。因“法则系$C$”一般在子系上不遗传。但在确定代数系的种的法则系中如结合律，交换律，分配律等可用运算结合的元素间的恒等式表示之。这样的法则显然在子系上是遗传的。当法则系C全由运算等式给出时$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\} C)$种代数系称为**原始代数系**。原始代数系的子系是和它同种的原始代数系。

当给与代数系A的子系族(A_λ)时，$\bigcap_\lambda A_\lambda$显然也是$A$的子系。$A$的子系的全体，按包含关系做成有序集。显然$A$是其中的最大元，容易看出$A$的所有子系的集合构成完备格。

设K为代数系A的子集，若取A的子系中含有K的全体的交，则它是A的子系中含K的最小者。将它称为由K**生成**的A的子系。若以$[K]$表示它，则令K对应$[K]$做成$p(A)$的内部映射。

设$\mathfrak{A}=(A, \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$，$\mathfrak{A}'=(A', \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$为具有相同作用域

Ω，Θ，…，的作用同类的两个代数系，f为A到A'的映射，关于任意的a，$b\in A$，若

$$f(a\,\alpha\,b)=f(a)\,\alpha f(b)$$

成立，则称f和运算α是相容的。又若

$$f(x\,\omega\,a)=x\,\omega f(a)$$

关于任意$x\in\Omega$，$a\in A$成立，则称f和运算ω是相容的。

当A到A'的映射f和所有的内部运算及外部运算都相容时，称f为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}'$（或A到A'的）的同态映射，这时显然$f(A)$是A'的子系。对应同态映射f为满射，单射，双射分别称f为满同态映射，单同态映射，同构映射。显然同态映射的复合仍为同态映射。

当$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}'$存在满同态映射或同构映射f时，分别称为$\mathfrak{A}'$同态于$\mathfrak{A}$或$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{A}'$同构。写做$f:\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{A}'$或$f:\mathfrak{A}\approx\mathfrak{A}'$（$f:A\simeq A'$，或$f:A\approx A'$）。显然同构关系是作用同类的代数系间的等价关系，同构的代数系可以看作具有相同的结构。

代数系$\mathfrak{A}$到本身的同态映射称为$\mathfrak{A}$的自同态映射。到本身的同构映射称为$\mathfrak{A}$的自同构映射。$\mathfrak{A}$的自同构映射的全体关于映射的复合显然构成群。

代数系$\mathcal{U}$的元素间有等价关系R，对于A的一个内部运算α若有

$$a\,R\,a',\quad b\,R\,b'\Rightarrow(a\,\alpha\,b)\,R\,(a'\,\alpha\,b')$$

则称R和α是相容的。这时对于A关于R的商集A/R的二元$C(a)$，$C(b)$，定义

$$C(a)\,\overline{\alpha}\,C(b)=C(a\,\alpha\,b)$$

于是在A/R中导入内部运算$\overline{\alpha}$，这个$\overline{\alpha}$称为由α诱导的A/R的内部运算，通常用同一文字α表示之。

再者，对于A的一个外部运算ω，若

$$a\,R\,a' \Rightarrow (x\,\omega\,a)\;R\;(x\,\omega\,a') \qquad (x\in\Omega)$$

恒成立，则称R和ω相容。这时，对于$x\in\Omega$，$C(a)\in A/R$定义

$$x\,\overline{\omega}\,C(a)=C(x\,\omega\,a)。$$

由此在A/R可以导入和ω具有相同作用域Ω的外部算法$\overline{\omega}$。这个$\overline{\omega}$称为由ω诱导的A/R的外部运算，通常也用同一文字ω表示之。

在代数系 $\mathfrak{A}=(A,\{\alpha,\ \beta,\ \cdots\},\ \{\omega,\ \theta,\ \cdots\})$的等价关系$R$和所有的内部运算及外部运算都相容时，$R$称为$\mathfrak{A}$的合同关系，这时若在$A/R$上用$A$上定义的所有运算同样定义之，则$(A/R,\ \{\alpha,\ \beta,\ \cdots\},\ \{\omega,\ \theta,\cdots\})$是和$\mathfrak{A}$作用同类的代数系。如此得到的代数系通常简单的称为代数系A/R，或称为A关于R剩余代数系或简称为剩余系。显然A到A/R的标准映射是A到A/R的同态映射。

原始代数系的剩余系显然可以看做和它同种的原始代数系。另外，单位元存在之类的法则（不能用运算等式表示出来的）在剩余系中也遗传。

和前面关于α系的叙述同样，容易证明下述定理。

定理1：（同态定理）设A和A'为两个作用同类的代数系，若f为A到A'的同态映射，则由f在A确定的等价关系R是合同关系，

$$f:\ A/R\approx f(A)。$$

推论1：（第一同构定理）设A，A'为二个作用同类的代数系，$f:\ A\simeq A'$，R'为A'中一个合同关系。这时，对于A的二元a，b若定义

$$a\,R\,b\Longleftrightarrow f(a)R'f(b),$$

则R是在A的合同关系，且$A/R \approx A'/R'$。

证明：若φ为A'到A'/R'的标准映射，则$\varphi \circ f$：$A \simeq A'/R'$，且显然有$R = R(\varphi \circ f)$，于是由定理立即得出结论。

推论2：（第二同构定理）设B为代数系A的子系，R为在A的一个合同关系，这时，若令$\overline{B}$为使$a R b$的$b \in B$存在的A的元素a的集合，则$\overline{B}$也是A的一个子系。另外若将等价关系R在B的元素间或$\overline{B}$的元素间缩小的写做R_B，$R_{\overline{B}}$，则它们分别是在B，$\overline{B}$的合同关系且$\overline{B}/R_{\overline{B}} \approx B/R_B$。

证明：先证明$\overline{B}$是子系。若a，$a' \in \overline{B}$则有b，$b' \in B$使$a R b$ $a' R b'$。因R是合同关系，故对于A的任意内部运算α，有$(a \alpha a')$ R $(b \alpha b')$，且对于任意外部运算ω有$(x \omega a)$ R $(x \omega b)$，$(x \in \Omega)$。因B是A的子系，故$b \alpha b'$，$x \omega b \in B$，于是$a \alpha a'$，$x \omega a \in \overline{B}$。故$\overline{B}$是$A$的子系。现在$A$到$A/R$的标准映射$\varphi$在$\overline{B}$或$B$上的缩小分别设为$\varphi_{\overline{B}}$，$\varphi_B$，显然有$\varphi_{\overline{B}}(\overline{B}) = \varphi_B(B)$且为$A/R$的子系。于是显然有$\varphi_{\overline{B}}$：$\overline{B} \simeq \varphi_{\overline{B}}(\overline{B})$，$R(\varphi_{\overline{B}}) = R_{\overline{B}}$，$\varphi_B$：$B \simeq \varphi_B(B)$，$R(\varphi(B)) = R_B$，故由定理1 $\overline{B}/R_{\overline{B}} \approx \varphi_B(\overline{B})$，$B/R_B \approx \varphi_B(B)$，故$\overline{B}/R_{\overline{B}} \approx B/R_B$。

设A为一个代数系，在A最小的等价关系R_0，最大的等价关系R_1，显然都是合同关系。且若(R_λ)为在A的合同关系的任意族，在A的元素间的关系作成的有序集中，$\inf R_\lambda$显然也是合同关系，故A的全部合同关系的集合，关于关系之间的顺序构成完备格。当A不具有R_0，R_1以外的合同关系时，A称为单纯代数系。

设 S 为代数系 A 的元素间的任意关系，若取含 S 的全部合同关系的下确界，它是含 S 的最小合同关系。称之为由 S 导出的 A 的合同关系。

设 $\mathfrak{A}_\lambda = (A_\lambda, \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$，$(\mathfrak{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $(\Omega, \Theta, \cdots)$ 作用同类的代数系的族。这时在做为集合的直积 $A = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 上内部运算 α，β，…，及分别具有 Ω，Θ，…，为作用域的外部运算 ω，θ，…，由如下定义可做出与 $\mathfrak{A}_\lambda$ 作用同类的代数系 $\mathfrak{A} = (A, \{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$。即对于 $a = (\cdots, a_\lambda, \cdots,)$，$b = (\cdots, b_\lambda, \cdots) \in A$ 定义

$$a\alpha b = (\cdots, a_\lambda \alpha b_\lambda, \cdots,)$$

$$a\beta b = (\cdots, a_\lambda \beta b_\lambda, \cdots)。$$

对于 $x \in \Omega$，$y \in \Theta$，…，$a(\cdots, a_\lambda, \cdots,) \in A$，定义

$$x\omega a = (\cdots, x\omega a_\lambda, \cdots)$$

$$y\theta a = (\cdots, y\theta a_\lambda, \cdots)。$$

如此得到的代数系 $\mathfrak{A}$ 称为 $(\mathfrak{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 的直积。当 Λ 为有限集时，上述直积可表示为 $A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n$ 与集合的直积时相同。

§3 自由代数系

现在考察具有一定的内部运算系 $\{\alpha, \beta, \cdots\}$ 及外部运算系 $\{\omega, \theta, \cdots\}$ 的作用同类的代数系。设 ω，θ，…的作用域分别是 Ω，Θ，…。

定理：设 K 为已与的非空集，则满足下述条件（1），（2）的（$\{\alpha, \beta, \cdots\}$，$\{\omega, \theta, \cdots\}$）类的代数系 S

及K到S的映射φ的组（S，φ）除同构外唯一存在。

（1）S由$\varphi(K)$生成$S=[\varphi(K)]$。

（2）设A为和S作用同类的任意代数系，f为K到A的任意映射，则存在S到A的同态映射F，使

$$f=F\circ\varphi。$$

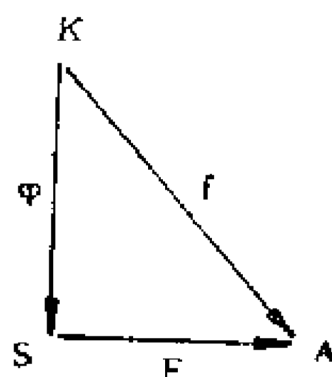


图 3

当（S，φ）满足（1），（2）时，φ是单射，上述F是由S和f唯一确定。

证明：先证明满足定理条件（1），（2）的（S，φ）是存在的。对于自然数n，归纳定义集合K_n如下，先令$K_1=K$，其次设$n\geqslant 2$，$K_m(m<n)$已经给出，K_n构成如下：

设（i，j）为满足$i+j=n$的任意自然数的组，

$$(\xi)\alpha(\eta),(\xi)\beta(\eta),\cdots,(\xi\in K_i,\eta\in K_j)$$

的记号，及

$$x\omega(\zeta),\quad y\theta(\zeta),\ \cdots,\ (x\in\Omega,\quad y\in\Theta,\ \cdots,$$

$\zeta\in K_{n-1}$）的记号的全体设为K_n。设其中$(\xi)\alpha(\eta)$和

$$(\xi')\ \alpha'(\eta')\quad(\alpha'\in\{\alpha,\ \beta,\ \cdots\},$$
$$\xi'\in K_{i'},\ \eta'\in K_{j'})$$

相等仅限于$\alpha=\alpha'$，$i=i'$，$j=j'$，$\xi=\xi'$，$\eta=\eta'$时，又$x\omega(\zeta)$和

$$x'\omega'(\zeta')\quad(\omega'\in\{\omega,\ \theta,\ \cdots\},\ x'\in\Omega',$$
$$\zeta'\in K_{n-1})\quad(\Omega'\text{为}\omega'\text{的作用域})$$

相等仅限于$\omega=\omega'$，$x=x'$，$\zeta=\zeta'$时。另外，设$(\xi)\alpha(\eta)$形的元素和$x\omega(\zeta)$形的元素不相等。

如此对于所有自然数n定义了互不相交的集合K_n。令S为所有K_n的并集。若$a \in K_n$，$b \in K_m$为S的任意二元，α为$\{\alpha, \beta, \cdots\}$的任意元素，则$(a)\alpha(b)$形的元素在$K_{n+m}$中，若$\omega$是$\{\omega, \theta, \cdots\}$的任意元素，$\Omega$为$\omega$的作用域，$x$为$\Omega$的任意元素，则$x\omega(a)$在$K_{n+1}$中。若把它们分别定义为在$S$中对$a$，$b$施行内部运算$\alpha$的结果及对$x$，$a$施行外部运算$\omega$的结果，则$S$为$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$类的代数系。（$\omega$，$\theta$，…的作用域分别为$\Omega$，$\Theta$，…）。又因$K_1 = K$，故$S \supset K$，显然$S$是由$K$生成的。在此若$\varphi$为$K$到$S$的标准单射，则关于$(S, \varphi)$条件(1)成立。

其次指出这个(S, φ)满足条件(2)，现在确定K_n到A的映射f_n如下：先令$f_1 = f$，对于$m < n$ $(n \geqslant 2)$的m，若构成了f_m，对于$(\xi)\alpha(\eta) \in K_n$，$\xi \in K_i$，$\eta \in K_j$，$(i + j = n)$，令$f_n((\xi)\alpha(\eta)) = (f_i(\xi))\alpha(f_j(\eta))$，对于$x\omega(\zeta) \in K_n$，$x \in \Omega$，$\zeta \in K_{n-1}$，令$f_n(x\omega(\zeta)) = x\omega(f_{n-1}(\zeta))$，则确定$f_n$，在此设$F$为$S$到$A$的映射，在$K_n$上和$f_n$一致，显然$F$为$S$到$A$的同态映射，满足$f = F \circ \varphi$。

定理其它部分的证明是容易的。

根据定理确定结构的代数系S称为K上的（Ω，Θ，…为作用域）$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$类的自由代数系。它的元素称为$K$上的$(\{\alpha, \beta, \cdots\}, \{\omega, \theta, \cdots\})$。$\varphi$称为$K$到$S$的标准单射。

§4 范畴(category)

本节及下节叙述和代数系相关连的一般的概念，范畴和函子。

例如考虑所有群组成的领域 θ（所有群的全体是领域，但不是集合）。对于 θ 的二个元素（即两个群）A，B，A到B的同态映射全体的集合记作$M(A, B)$。若 $f\in M(A, B)$，$g\in M(B, C)$，则$g\circ f\in M(A, C)$。如此，关于f，g的复合，结合律

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

成立。$M(A, A)$ 中含有在A的恒等映射I_A，对于任意的$f\in M(A, B)$，$f'\in M(B, A)$，有

$$f\circ I_A=f,\quad I_A\circ f'=f'。$$

一般的，当考察已与种类的代数系全体的领域及其间的同态映射的全体时，显然有与此同样的事实成立。将它一般化，定义范畴如下：

范畴（category）$\mathcal{C}$由下述三事物确定。

（i）称为$\mathcal{C}$的对象的A，B，C…组成的领域$\theta(\mathcal{C})$。（称之为$\mathcal{C}$的对象领域。设$\theta(\mathcal{C})$不是空集。）

（ii）对于$\theta(\mathcal{C})$的任意二元A，B，称为A到B的泛射的领域$M(A, B)$。（称之为A到B的泛射领域，$M(A, B)$可能是空集。）

（iii）对于$\theta(\mathcal{C})$的任意三元素A，B，C，定义的，称为在$\mathcal{C}$的结合法则的$M(A, B)\times M(B, C)$到$M(A, C)$的映射$\alpha_{A,B,C}$。

在很多情形下，对象是集合（或代数系）泛射是其间的映射（或同态映射）但并不都是如此，这是将映射在广义的意义下使泛射的用语的原因。

f 为 A 到 B 的泛射也写做 $f: A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$。当 $f: A\to B$，$g: B\to C$ 时，将 $\alpha_{A,B,C}(f, g)$ 用 $g\circ f$ 表示之，称之为 f 和 g 的结合。设下述条件成立：

（1）结合律，当 $f: A\to B$，$g: B\to C$，$h: C\to D$ 时

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)。$$

（2）对于任意对象 A，$M(A, A)$ 包含元素 e_A，当 $f: A\to B$ 时，有

$$f\circ e_A=f,\quad e_B\circ f=f。$$

以上是范畴的定义，由此立即得知 $M(A, A)$（如果它是集合）将泛射的结合作为运算成为具有单位元 e_A 的单位半群。e_A 称为 A 的单位泛射。

例1：取所有群的全体做为对象领域，泛射为同态映射，结合法则为映射的复合，则得到一个范畴，称之为群范畴，以 $\mathcal{g}$ 表示之。若对象只限于 $abel$ 群，则得到**abel**群范畴 μ。

范畴 $\mathscr{C}'$ 当下述（i），（ii），（iii）成立时称为范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴（*subcategoroid*）。

（i）$\theta(\mathscr{C}')\subset\theta(\mathscr{C})$

（ii）对于 $A, B\in\theta(\mathscr{C}')$，$A$，$B$ 在 $\mathscr{C}'$ 的泛射领域 $M'(A, B)$ 包含在 $\mathscr{C}$ 的泛射领域 $M(A, B)$ 中。

（iii）当 $f\in M'(A, B)$，$g\in M'(B, C)$ 时，f，g 在 $\mathscr{C}'$ 的结合和在 $\mathscr{C}$ 的结合 $g\circ f$ 相同。而且在 $M'(A, A)$ 的单位泛射和在 $M(A, A)$ 的单位泛射 e_A 一致。

当给与范畴$\mathscr{C}$的对象领域$\theta(\mathscr{C})$的子领域$\theta'(\neq\phi)$时，对于$A, B\in\theta'$，若$M'(A, B)=M(A, B)$，则θ'为对象领域，$M'(A, B)$为A到B的泛射领域。（具有在$\mathscr{C}$上相同的结合）得到$\mathscr{C}$的子范畴，称之为由θ'确定的$\mathscr{C}$的自然的子范畴。

例2： μ是g的自然子范畴。

例3： 当给与范畴$\mathscr{C}$时，若固定一个对象A，令$\theta(\mathscr{C}')=\{A\}$，$M'(A, A)=\{e_A\}$，则得到仅具有一个对象$A$和仅一个泛射$e_A$的$\mathscr{C}$的子范畴$\mathscr{C}'$。称$\mathscr{C}'$为由$A$确定的单位范畴，以$\mathscr{C}(A)$表示之。

对于范畴$\mathscr{C}$，如下确定的范畴$\dot{\mathscr{C}}$称为$\mathscr{C}$的对偶范畴。

（i）设$\theta(\dot{\mathscr{C}})=\theta(\mathscr{C})$。$\theta(\mathscr{C})$的元素$A$看做是$\theta(\dot{\mathscr{C}})$的元素时以$\dot{A}$表示之。

（ii）对于$\dot{A}, \dot{B}\in\theta(\dot{\mathscr{C}})$，在$\dot{\mathscr{C}}$中$\dot{A}, \dot{B}$的泛射领域$\dot{M}(\dot{A}, \dot{B})$是$M(B, A)$。$M(B, A)$的元素$f$看做$\dot{M}(\dot{A}, \dot{B})$的元素时记作$\dot{f}$。

（iii）$\dot{f}\in\dot{M}(\dot{A}, \dot{B})$，$\dot{g}\in\dot{M}(\dot{B}, \dot{C})$在$\dot{\mathscr{C}}$的结合$\dot{g}\dot{f}$是$g$，$f$在$\mathscr{C}$的结合$f\circ g$。

这时显然满足条件（1），（2）。

由n个范畴$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \cdots, \mathscr{C}_n$可定义它的积范畴$\mathscr{C}=\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2\times\cdots\times\mathscr{C}_n$如下：

（i）设$\theta(\mathscr{C})=\theta(\mathscr{C}_1)\times\theta(\mathscr{C}_2)\times\cdots\times\theta(\mathscr{C}_n)$（直积领域）。

（ii）对于$A=(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，$B=(B_1, B_2, \cdots, B_n)$（$A_i, B_i\in\theta(\mathscr{C}_i)$）$\in\theta(\mathscr{C})$，设

$$M(A, B)=M(A_1, B_1)\times M(A_2, B_2)\times\cdots\times M(A_n, B_n)\text{（直积领域）}$$

(iii) 对于$f=(f_1, \cdots, f_n)(f_i\in M(A_i, B_i))\in M(A, B)$，

$g=(g_1,\cdots,g_n)(g_i\in M(B_i,C_i))\in M(B,C)$，

设$g\circ f=(g_1\circ f_1, \cdots, g_n\circ f_n)$。

显然这时条件（1），（2）也成立。

§5 函　子(functor)

当给与两个范畴$\mathscr{C}$和$\mathscr{C}'$时，$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的函子（*functor*）T由下述二者确定：

（i）$\theta(\mathscr{C})$到$\theta(\mathscr{C}')$的映射T_θ。

（ii）当$A, B\in\theta(\mathscr{C})$时，在$\mathscr{C}$的泛射领域$M(A, B)$到在$\mathscr{C}'$的泛射领域$M'(T_\theta(A), T_\theta(B))$的映射$T_{A,B}$。

关于T_θ和$T_{A,B}$设下述条件成立：

（3）$T_{A,A}(e_A)=e_{T_\theta(A)}$

（4）当$f\in M(A, B)$，$g\in M(B, C)$时

$T_{B,C}(g)\circ T_{A,B}(f)=T_{A,C}(g\circ f)$。

习惯上通常将T_θ及$T_{A,B}$略写为T。$\mathscr{C}(\theta)$即T_θ的定义域称为T的变数领域，$\theta(\mathscr{C})$的元素，即$\mathscr{C}$的对象称为T的变数。$\mathscr{C}$称为T的变数范畴，$\mathscr{C}'$称为值范畴，$\theta(\mathscr{C}')$称为T的值领域。

当T为范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的函子。T'为$\mathscr{C}'$到$\mathscr{C}''$的函子时，令$A'=T_\theta(A)$，　$B'=T_\theta(B)$，由

$$T_{\theta'}\circ T_\theta=T_{\theta''},\quad T'_{A',B'}\circ T_{A,B}=T''_{A,B}$$

可确定$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}''$的函子T''。这个T''称为T和T'复合的函子，写做$T''=T'\circ T$。

函子可以看做给与范畴间的同态。对于T_θ及所有A，$B\in\theta(\mathscr{C})$，当$T_{A,B}$是双射时，T称为**同构函子**。(*isomorphism functor*)。自$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的同构函子存在时称范畴$\mathscr{C}$，$\mathscr{C}'$是同构的。

例5：若T为范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的函子，T_θ为单射，则$T_\theta(A)$ $(A\subset\theta(\mathscr{C}))$的集合为$\theta'_1$，$T_{A,B}(f)(f\in M(A,B))$的集合为$M'_1(T_\theta(A),T_\theta(B))$时由$\theta'_1$，$M'_1(T_\theta(A),T_\theta(B))$可确定$\mathscr{C}'$的子范畴$\mathscr{C}'_1$。

例6：设$\mathscr{C}$为一个范畴，若对于任意的$A\in\theta(\mathscr{C})$有$T_\theta(A)=A$，对于任意的$f\in M(A,B)$，有$T_{A,B}(f)=f$，则T为$\mathscr{C}$到本身的同构函子（称之为范畴$\mathscr{C}$的**恒等函子**，记作$I_{\mathscr{C}}$）。

例7：范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的函子T是同构函子的要充条件是有$\mathscr{C}'$到$\mathscr{C}$的函子T'存在，使$T'\circ T=I_{\mathscr{C}}$，$T\circ T'=I_{\mathscr{C}'}$。

范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的**反变函子**（*contravariant functor*）T是由

(i) $\theta(\mathscr{C})$到$\theta(\mathscr{C}')$的映射T_θ

(ii) $M(A,B)$到$M'(T_\theta(B),T_\theta(A))$的映射$T_{A,B}$确定。其中关于$T_\theta$及$T_{A,B}$，有

(3′) $T_{AA}(C_A)=e_{T\theta}(A)$，

(4′) 当$f\in M(A,B)$，$g\in M(B,C)$时

$$T_{A,B}(f)\circ T_{B,C}(g)=T_{A,C}(g\circ f)$$

成立。

对应反变函子，前面定义的函子称为**共变函子**（*covariant functor*）。

例8：设T为$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的函子，T'为$\mathscr{C}'$到$\mathscr{C}''$的函子。若T，T'都是共变函子或反变函子，则$T'\circ T$是共变函子，若

T，T'之一为共变函子，另一为反变函子，则$T' \circ T$是反变函子。

例9：当$\mathscr{C}$为一个范畴时，若令$T_{0}(A)=\widehat{A}$，$T_{A,B}(f)=\widehat{f}$，则T为$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的对偶范畴$\widehat{\mathscr{C}}$的反变函子（这个T记作$\widehat{I}_{\mathscr{C}}$）。一般地，范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}'$的反变函子$T$可看做是$\widehat{\mathscr{C}}$到$\widehat{\mathscr{C}}'$的或$\mathscr{C}$到$\widehat{\mathscr{C}}'$的共变函子（详言之，这是代替$T$考虑$T \circ \widehat{I}_{\widehat{\mathscr{C}}}$或$\widehat{I}_{\widehat{\mathscr{C}}} \circ T$）。

将上述定义推广，定义多变数的函子如下：

当给与$(n+m+1)$个范畴$\mathscr{C}_1, \cdots, \mathscr{C}_n$，$\mathscr{C}_{n+1}, \cdots, \mathscr{C}_{n+m}$，$\mathscr{C}$时，$\theta(\mathscr{C}_i)$的元$A_i$（$i=1, \cdots, n$）为共变变数，$\theta(\mathscr{C}_{n+j})$的元$A_{n+j}$（$j=1, \cdots, m$）为反变变数的$(n+m)$变数的函子$T$由下述二者确定。

（i）由$\theta(\mathscr{C}_1)\times\cdots\times\theta(\mathscr{C}_{n+m})$到$\theta(\mathscr{C}')$的映射$T_\theta$，使

$$T_\theta(A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{n+m})\in\theta(\mathscr{C}'),$$

（ii）对于$f_i\in M(A_i, B_i)$（$i=1, \cdots, n$），$f_{n+j}\in M(B_{n+j}, A_{n+j})$（$j=1, \cdots, m$）有映射$T_{A_1B_1, \cdots, A_{n+m}, B_{n+m}}$使

$$T_{A_1, B_1, \cdots, A_{n+m}, B_{n+m}}(f_1, \cdots, f_{n+m})\in M(T_\theta(A_1, \cdots, A_{n+m}), T_\theta(B_1, \cdots, B_{n+m}))。$$

关于它们

（5）$T(e_{A_1}, \cdots, e_{A_{n+m}})=e_{T(A_1, \cdots, A_{n+m})}$。

（6）当$f_i\in M(A_i, B_i)$，$g_i\in M(B_i, C_i)$，（$i=1, \cdots, n$）

$f_{n+j}\in M(B_{n+j}, A_{n+j})$，$g_{n+j}\in M(C_{n+j}, B_{n+j})$，（$j=1, \cdots, m$）

时，有

$$T(g_1, \cdots, g_{n+m}) \circ T(f_1, \cdots, f_{n+m})$$

$$= T(g_1 \circ f_1, \cdots, g_n \circ f_n, f_{n+1} \circ g_{n+1}, \cdots,$$

$$f_{n+m} \circ g_{n+m}),$$

成立。

如上的函子T不外是和范畴$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_n \times \dot{\mathscr{C}}_{n+1} \times \cdots \times \dot{\mathscr{C}}_{n+m}$到$\mathscr{C}'$的共变函子，将函子的意义稍加推广，也称之为$\mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_n \times \mathscr{C}_{n+1} \times \cdots \times \mathscr{C}_{n+m}$到$\mathscr{C}'$的函子，$\mathscr{C}_1$，…，$\mathscr{C}_n$称为$T$的**共变变数范畴**，$\mathscr{C}_{n+1}$，…，$\mathscr{C}_{n+m}$称为$T$的**反变变数范畴**。也有称$T$关于$\mathscr{C}_i$（$i = 1$，…，$n$）或$\theta(\mathscr{C}_i)$共变，关于$\mathscr{C}_{n+j}$（$j = 1$，…，$m$）或$\theta(\mathscr{C}_{n+j})$反变的。

当T_1，T_2都是$\mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_n \times \mathscr{C}_{n+1} \times \cdots \times \mathscr{C}_{n+m}$到$\mathscr{C}'$的函子，都是关于$\mathscr{C}_1$，…，$\mathscr{C}_n$共变，关于$\mathscr{C}_{n+1}$，…，$\mathscr{C}_{n+m}$反变时，$T_1$，$T_2$称为同种的函子。

当T_1，T_2为上述的同种函子时，对于$\theta(\mathscr{C}_1) \times \cdots \times \theta(\mathscr{C}_{n+m})$的任意元$(A_1, \cdots, A_{n+m})$，存在$M(T_1(A_1, \cdots, A_{n+m}), T_2(A_1, \cdots, A_{n+m}))$的元$\phi_{A_1, \cdots, A_{n+m}}$若满足下述条件（C）则族$(\phi_{A_1, \cdots, A_{n+m}})$称为$T_1$到$T_2$**的自然变换**。

（C）当A_i，$B_i \in \theta(\mathscr{C}_i)$；$f_i: A_i \to B_i$（$i = 1$，…，$n$）。

$$A_{n+j}, B_{n+j} \in \theta(\mathscr{C}_{n+j}); f_{n+j}: B_{n+j} \to A_{n+j} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

时，下列图表是可换的。

$$
\begin{array}{ccc}
T_1(A_1,\cdots,A_{n+m}) & \xrightarrow{\phi_{A_1,\cdots,A_{n+m}}} & T_2(A_1,\cdots,A_{n+m}) \\
T_1(f_1,\cdots,f_{n+m})\downarrow & & \downarrow T_2(f_1,\cdots,f_{n+m}) \\
T_1(B_1,\cdots,B_{n+m}) & \xrightarrow[\phi_{B_1,\cdots,B_{n+m}}]{} & T_2(B_1,\cdots,B_{n+m})
\end{array}
$$

这时 $(\phi_{A_1\cdots A_{n+m}})$ 可用ϕ表示之，简记为$\phi: T_1 \to T_2$。

若T_3是和T_1，T_2同种的函子，$\Psi: T_2 \to T_3$为自然变换，则对于$\theta(\mathscr{C}_1)\times\cdots\times\theta(\mathscr{C}_{n+m})$的任意元 $(A_1,\cdots,A_{n+m})$，若令 $\Psi_{A_1,\cdots,A_{n+m}}\circ\phi_{A_1,\cdots,A_{n+m}} = \chi_{A_1,\cdots,A_{n+m}}$，则族 $(\chi_{A_1,\cdots,A_{n+m}})$ 显然给出T_1到T_3的自然变换，称之为ϕ，Ψ的复合。写做$\chi=\Psi\circ\phi$。

范畴和函子的概念是基本的而且是一般的，广泛应用到代数学及拓扑学的各个分支中。如在拓扑几何学、同调代数学以及代数几何学中。

参 考 文 献

1. 谢邦杰，超穷数与超穷论法，1979。

2. 小野宽晰，关系の代数，1979。

3. 中山正，集合、位相、代数系，1949。

4. 布川正已，现代数学序说，上，1978。

5. 赤攝也，集合论入门，1975。

6. 赤攝也，超限論法について，数学，7 (1955)，31。

7. 河田敬義，集合、位相、測度，1957（中译本：集合、拓扑、测度。）

8. 弥永昌吉、小平邦彦，现代数学概说 / . 1967。

9. 弥永昌吉、弥永健一，集合と位相，1977。

10. 难波完尔，集合论，1975。

11. 森毅，无限集合，1976。

12. 黑崎达，集合论概要，1966。

13. 黑崎达，集合论演习，1975。

14. Алексанэров П.С.и Колмогоров А.Н.,Ввеэение в теорию множесмв и миоוию функций 1948（中译本：集与函数泛论初阶）。

15. Bernays, P, A., System of axiomatic set-theory, Part I, J. Symbolic Logic, 2(1937), 65—77.

16. Bourbaki N., Elements de mathematigue, Theorie des ensemble, 1968.（有日、英、俄译本）。

17. Cantor G., Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Crelles J. 77 (1874).

18. Cantor G., Beiträge Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. 46 (1895).

19. Cantor G., Ein Beitrage Zur Mannigfaltigkeitslehre, Crelles J. 84 (1878).

20. Cohen P. J., Set theory and the continuum hypothesis, 1966.

21. Drake, F. R., Set theory, 1974.

22. Enderton H. B., Elements of set theory, 1977.

23. Fraenkel, A., Zu den Grundlagen der Cantor Zermeloschen Mengenlehre, Math. Ann., 86(1922),

230—237.

24. Fraenkel, A.and Lévy A., Abstract set theory, (1976).

25. Gödel, K., The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, 1940.

26. Halmos P. R., Naive set theory, 1960.

27. Hausdorff F., Mengenlehre, 1935（中译本：豪斯道夫，集论）。

28. Jech. T. J., The Axiom of choice, 1973.

29. Kuratowski, K. & Mostowski A., set theory, 1976.

30. J. Von Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. Reine Angew. Math., 154 (1925)219—240.

31. J. Von Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Z., 27 (1928), 669—752.

32. Sigler L. E., Exercises in set theory, 1976.

33. Suppes P., Axiomatic set theory, 1960.

34. Zermelo E., Beweis dass Jede Menge wohlgeord net werden kann, Math. Ann., 59 (1904), 514—516.

35. Zermelo E., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Math. Ann., 65 (1908), 261—281.

36. Zuckerman, M. M., Sets and transfinite numbers, 1974.

习 题 解 答

第一章 集 合

§1 元素和集合

1 a. $\{x: x=2k,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\}$。

b. $\{x: x=7n+5,\ n=0,\ 1,2,\cdots\}$。

c. $\{x: ax+b>0\}$。

d. $\{\{a_i, a_j\}: \{a_i, a_j\}\subset\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\}$。

e. $\{x: \mathrm{tg}x=1\}$。

f. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: ad-cb\neq0,\ a,b,c,d\text{ 均为实数}\right\}$。

g. $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$。

2. a. 全体实数的集合。

b. 不是集合。

c. 空集。

d. 是 $x=k\pi$ （$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）的集合。

e. 有限集合。

f. a 的 n 次方根的集合。

4. 区别在 K 的要求。（a）为小于确定常数 K 的函数，（b）为一切有界函数。

5. a. $\{(a_1, a_2, \cdots): \text{存在某常数}K,\ |a_k|<K\}$。

b. $\{(a_1, a_2, \cdots): \text{存在}a,\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ a_n\text{为实数}\}$。

c. $\{(a_1, a_2, \cdots)\}: \sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty\}$。

d. $\{(a_1, a_2, \cdots)\}: \sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|<\infty\}$。

6. a. $\{\square ABCD: AB \mathbin{/\!/} CD, AD \mathbin{/\!/} BC\}$。

b. $\{\triangle ABC: AB = BC = AC\}$。

c. $\{\square ABCD: AB = BC = CD = DA\}$。

7. a.

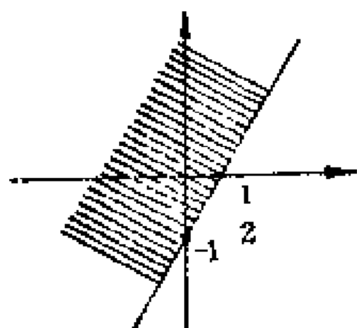


图 4

b.

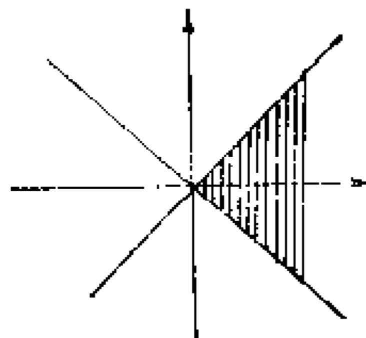


图 5

c.

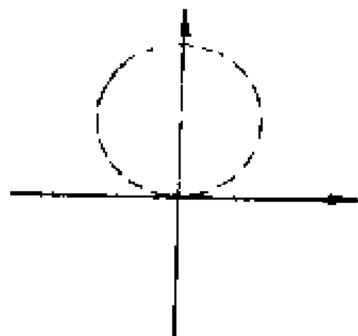


图 6

d.

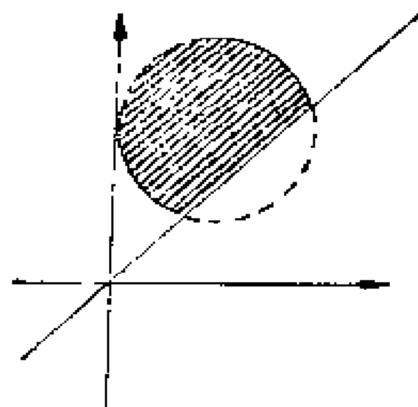


图 7

3. a. 满足 $f(x) \geqslant g(x)$ 且 $h(x) = 0$ 的点集合。

b. 由（1，0）到（0，1）两点间线段上的点集。

c. $\{a\}$。

d. (a, b)。

e. 空集。

f. $\left\{\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, b - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$。

g. 相似于平面图形 S 的图形全体。

h. $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$。

i. $\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$。

j. $\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$。

k. 整除 a 的自然数全体。

l. 7 的一切正整数倍。

m. 半开区间$[8, 9)$。

§2 包含关系

1. a. A的全部子集的集族。

   b. 集合A。

   c. A的所有以B为子集的子集的集族。

   d. A的所有以a为元素的子集的集族。

   e. $\mathfrak{M}$中所有以A为子集的集族。

   f. $\mathfrak{M}$中所有含a为元素的集族。

2. a. 不成立。

   b. 在实数内成立，在复数内不成立。

   c. 成立。

   d. 成立。

3. $p(A)=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \phi, \{a, b, c\}\}$共$2^3=8$个子集。

4. 以空集为元素的集；以空集的类为元素的集；单元素a的集；以$\{a\}$为元素的单元素集；a，b二元素的集；以$\{a, b\}$为元素的单元素集；以A为元素的单元素集；以A，B为元素的集；以$\{A\}$，$\{B\}$为元素的集。

5. (a)不成立。(b)不成立。(c)成立。(d)不成立。(e)不成立。(f)成立。(g)成立。(h)不成立。(i)不成立。

6. $p(A)\setminus A=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\},$

$\{a, b, d\}$，$\{b, c, d\}\{a, c, d\}$，ϕ共$2^4-1=15$个真子集。

§3 集合的并和交

1. 因$B\cap A\subset A$，故$A\cup(B\cap A)=A$；因$A\subset B\cup A$，故$A\cap(B\cup A)=A$。

2. 若$x\in A$，由$A\cup B\subset A\cap B$得$x\in B$，故$A\subset B$。同理$B\supset A$。

3. 若$x\in A\cup C$，由$A\subset B$，有$x\in B\cup C$，故$A\cup C\subset B\cup C$。同理$A\cap C\subset B\cap C$。

4. a．$\{y: y\subset A$，且$B\subset y$或$C\subset y\}$。

   b．$\{y: \{a, b\}\subset y\subset A\}$。

   c．$\{(1, 0), (0, 1)\}$。

   d．$\{x: f(x)=g(x)\}$。

   e．正奇数集。

   f．非负整数集。

5. $A\cup B$为平面上所有矩形和菱形的全体。

   $A\cap B$为平面上正方形的全体。

6. $A\cup B$为k的倍数或为l的倍数的全体，$A\cap B$为k和l的最小公倍数的倍数的全体。

7. 由定义直接推得。

8. 由定义直接推得。

9. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=(-1, 1)$。

10. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=\{1\}$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\left(\frac{1}{n}, n\right)$。

11. a．当$M=\phi$时即为$A\subset B$。

    b．当$M=A\cup B$时即为$A\subset B$。

12. 不能。如$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$M=\{a, b\}$，则有$A\cup M\subset B\cup M$，但$A\subset B$不成立。

13. a．设$A=\{a, b\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b\}$，则$A\cup B=A\cup C=A$，但$B\neq C$。

b. 设$A=\{a\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{a, c\}$, 则$A\cap B=A\cap C$, 但$B\neq C$。

c. 设$A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$, 则$A-B=A-C=\{a\}$, 但$B\neq C$。

14. 由$A\cup B=M\cup N$, 有$A\subset M\cup N$, 因$A\cap N=\phi$, 故$A\subset M$。同理有$M\subset A\cup B$, 因$B\cap M=\phi$, 故$A\supset M$。

$\therefore$ $A=M$, 同理$B=N$。

§4. 补集及对称差

1. 由概念可推出$a\Rightarrow b\Rightarrow c\Rightarrow a$即可。

2. 由概念可推出$a\Rightarrow b\Rightarrow c\Rightarrow a$即可。

3. b, c, d, e, f, g皆与a等价。

4. 等式两端互相包含。

5. a. $A\cap(B\setminus C)=A\cap(B\cap\complement C)=A\cap B\cap\complement C=B\cap(A\cap\complement C)=B\cap(A\setminus C)$。$B\cap(A\setminus C)=B\cap(A\cap\complement C)=(B\cap A)\cap\complement C=(B\cap A)\setminus C$。$(A\cap B)\setminus C=(A\cap B)\cap\complement C=[A\cap B\cap\complement C]\cup[A\cup\complement(A\cap B)]=(A\cap B)\cap[\complement C\cup\complement A]=[A\cap B]\supset\complement[A\cap C]=A\cap B\setminus A\cap C$。

b. $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=(A\cap\complement B)\cup(A\cap\complement C)=A\cap(\complement B\cup\complement C)=A\cap\complement(B\cap C)=A\setminus B\cap C$。

c. $\complement(A-B)=\complement(A\cap\complement B)=\complement A\cup B$。

6. $A\setminus(A\cap B)=A\cap\complement(A\cap B)=A\cap[\complement A\cup\complement B]=[A\cap\complement A]\cup[A\cap\complement B]=A\cap\complement B=A\setminus B$。

$(A\cup B)\setminus B=(A\cup B)\cap\complement B=A\cap\complement B=A\setminus P$。

7. $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap\complement C)\cup(B\cap\complement C)=\complement C\cap(A\cup B)=(A\cup B)\setminus C$。

8. a. 若$x\in A\cap B$, 则$x\in A$且$x\in B$。又必有$x\in C$或$x\in\complement C$。故必有$x\in A$且$x\in C$或$x\in B$且$x\in\complement C$, 即$x\in(A\cap$

$C)\cup(B\cap\complement C)$。故 $A\cap B\subset(A\cap C)\cup(B\cap\complement C)$。

b. 类似可证得。

9. *a*. $(A-C)\cap(B-C)=A\cap\complement C\cap B\cap\complement C=(A\cap B)\cap\complement C=(A\cap B)\setminus C$。

b, *c*, *d* 的证法同上。

10. *a*. $(A\wedge B)\triangle(A\cap B)=A\triangle(B\triangle(A\cap B))$
$=A\triangle[B\cup(A\cap B)-B\cap(A\cap B)]=A\triangle(B-(A\cap B)]=A\triangle(B\cap\complement A)=A\cup(B\cap\complement A)=A\cup B$。

b. 类似的可推得。

11. 由定理5知△满足群公理。

12. 不一定。如 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, c, d\}$
$M=\{a, b\}$, $N=\{b\}$, $A-B=\{a\}$ $M-N=\{a\}$,
$A\cup N=\{a, b, c\}$, $B\cup M=\{a, b, c, d\}$ 即为反例。

13. $A=[(A\cup C)-C]\cup(A\cap C)=[(B\cup C)-C]\cup(B\cap C)=B$。

14. $(S-A)-(S-B)=\complement A\cap\complement(\complement B)=\complement A\cap B=(S-A)\cap B$。
$(S-A)\cap B=\complement A\cap B=\complement(A\cup\complement B)\subset\complement(A\cap\complement B)=S-(A\cap\complement B)=S-(A-B)$。

15. $(A\triangle B)\cap\complement A=[(A\cap\complement A)\cup(B\cap\complement A)]\cap\complement A=B\cap\complement A$。

16. $\{(A\triangle B)\cap\complement A\}\cup(A\cap B)=(B\cap\complement A)\cup(A\cap B)=B$。

17. 因 $A\triangle B=A\triangle C$,故 $(A\triangle B)\triangle A=(A\triangle C)\triangle A$,即 $(A\triangle A)\triangle B=(A\triangle A)\triangle C$,即 $\phi\triangle B=\phi\triangle C$,故 $B=C$。

§5 集　　族

1. $\bigcup_{n\in N}\left(\frac{1}{n},\ 1\right)=(0,\ 1)$，$\bigcap_{n\in N}\left(\frac{n-1}{n},\ \frac{n+1}{n}\right)$

$=\{1\}$。

2. $x'>0\Longleftrightarrow$存在n'，使$x'>\frac{1}{n'}$。

3. $\bigcap_{x>1}[0,\ x)=[0,\ 1]$。

4. $\bigcup_{r=-\infty}^{\infty}A_n=(-\infty,\ \infty)$，$\bigcap_{r=-\infty}^{\infty}A_n=\phi$。

5. 设$x\in(\bigcup_{a\in D}A_a)\cap(\bigcap_{a\in D}B_a)$，则$x\in\bigcup_{a\in D}A_a$且$x\in\bigcap_{a\in D}B_a$。故存在$a_1$，使$x\in A_{a_1}$及$B_{a_1}$，即$x\in\bigcup_{a\in D}(A_a\cap B_a)$。

6. $x'\in\{x:f(x)=a\}\Longleftrightarrow$对任意$n$，有$a\leqslant f(x')<a+\frac{1}{n}\Longleftrightarrow x'\in\bigcap_{n\in N}\{x:a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\}$。

9. 设$x\in B_i\cap B_j$（$i>j$），则$x\in B_i$且$x\in B_j$，即$x\in A_i-\left(\bigcup_{t=1}^{i-1}A_t\right)$，与$x\in B_j=A_j-\left(\bigcup_{t=1}^{j-1}A_t\right)$矛盾。

用归纳法证明$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。已知$A_1=B_1$，设$\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i=\bigcup_{i=1}^{k-1}B_i$，则$\bigcup_{i=1}^{k}B_i=\bigcup_{i=1}^{k-1}B_i\cup B_k=\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i\cup[A_k-\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i]=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$。

8. 当$2k\leqslant n+1$时，设$x\in\bigcap_{H\in T_k}P_H$，因$P_H=\bigcup_{i\in H}A_i$，故任意$k$个$A$中必有含$x$者，因$2k\leqslant n+1$，故最少有$k$个$A$皆含$x$，即有$Q_H$（$H\in T_k$），使$x\in Q_H$，$\therefore x\in\bigcup_{H\in T_k}Q_H$。当$2k\geqslant n+1$时

对偶的可以得出。

7. a. $C-(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=C\cap\complement(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=C\cap(\bigcap\limits_{\alpha\in D}\complement A_\alpha)$

$=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(C\cap\complement A_\alpha)-\bigcap\limits_{\alpha\in D}(C-A_\alpha)$。

b. 类似的可以推出。

§7 集列的极限

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=[0,\infty)$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{0\}$。

2. 由概念可直接推出。

3. 由概念可直接推出。

4. $A=\underline{\lim}A_n\subset\underline{\lim}A_{n_k}\subset\overline{\lim}A_{n_k}\subset\overline{\lim}A_n=A$

§6. 直并与直积

1. 由概念直接推出。

$A\times B\setminus A_1\times B_1=(A_1\times B\setminus B_1)\cup(A\setminus A_1\times B_1)\cup$

$(A\setminus A_1\times B\setminus B_1)$。

$A\times B\setminus A_1\times B_1=[(A_1\times B\setminus B_1)\cup(A\setminus A_1\times B\setminus B_1)]$

$\cup(A\setminus A_1\times B_1)$

$=[(A_1\cup A\setminus A_1)\times B\setminus B_1]\cup(A\setminus A_1\times B_1)$

$=(A\times B\setminus B_1)\cup(A\setminus A_1\times B_1)$。

同理推得

$A\times B\setminus A_1\times B_1=(A\setminus A_1\times B)\cup(A_1\times B\setminus B_1)$。

2. 由概念直接可证得。

3. a. $\{(a,b): a\in[3,4], b\in[5,7]\}$。

b. $\{(a,b): a\in[3,5], b\in[4,7]$或$a\in[2,4], b\in[5,8]\}$。

第二章　关系与映射

§1　二元关系

1. a. A中任意二元素有R关系。

   b. 任意二元素没有R关系。

   c. A中任意二不同元素有R关系。

   d. S的元素与子集的属于关系。

   e. S的子集间的互补关系。

2. a. $\{A: A\supset B\}$。

   b. $\{a$：对某个$b\in B$，$a<b\}$。

3. $(R_1\circ R_2)[A]=\{b$：对某个$a\in A$，$(a, b)\in R_1\circ R_2\}$

   $=\{b$：对某个$a\in A$，有c使$(a, c)\in R_2$，$(c, b)\in R_1\}$

   $=\{b$：$(c, b)\in R_1$对某个$c\in\{c$：对某个$a\in A$，$(a, c)\in R_2\}\}$

   $=R_1[R_2[A]]$。

§2　等价关系

1. 设$(a, b)\in R^{-1}$，$(b, c)\in R^{-1}$，即$(b, a)\in R$，$(c, b)\in R$，则$(c, a)\in R$。故$(a, c)\in R^{-1}$。

2. $-5\backslash(x-x)$；若$-5\backslash(x-y)$，则$-5\backslash(y-x)$；若$-5\backslash(x-y)$，$-5\backslash(y-z)$，则$-5\backslash[(x-y)+(y-z)]$，即$-5\backslash(x-z)$。

   $A_i=\{x: x=5k+i$，k为整数$\}$，$i=0, 1, 2, 3, 4$。

   3，4，5，的证法同上。

6. 在关系R中若a与其它元素无关系，则推不出 $(a, a) \in R$；自反性由对称性和可迁性推不出来。

7. $S \times S$是包含R的等价关系，故包含R的等价关系族Q非空。令$R^* = \bigcap\{R' : R' \in Q\}$，则$R^* \supset R$，$R^*$是等价关系，$R^*$是唯一的。

§3 序 关 系

1. 最大元为2，无最小元。各元都有直前元，除1，2外各元都有后继元，奇数集无下界，而任意偶数都是其上界，上确界为1，偶数集的下确界为1，上确界为2。

2. a. $\triangle \subset (< \cup \triangle) = \leqslant$。

b. $\leqslant \cap \leqslant^{-1} = (< \cup \triangle) \cap (< \cup \triangle)^{-1}$

$= (< \cup \triangle) \cap (<^{-1} \cup \triangle^{-1}) = \triangle$。

c. 设$(a, b) \in \leqslant \circ \leqslant$，则有$c$，使$(c, b) \in \leqslant$且$(a, c) \in \leqslant$。即$c < b$或$c = b$，$a < c$或$a = c$，故$a < b$或$a = b$。即$(a, b) \in < \cup \triangle = \leqslant$。

3. $\{(x, y) : x < 1\} \cup \{(x, y) : x = 1, y < 1\}$。

4. $(Aa_2)a_1 = (\{x : x < a_2, x \in A\})a_1 = \{x : x < a_2, x \in A; x < a_1, x \in Aa_2\} = \{x : x < a_1, x \in A\} = Aa_1$。

§4 映　　射

1. 设$b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$，则$b \in f(A_1)$而$b \overline{\in} f(A_2)$。即有$a \in A_1$使$f(a) = b$，而对每一$a' \in A_2$，均有$f(a') \neq b$。则有$a \in A_1$，$a \overline{\in} A_2$使$f(a) = b$。即$a \in A_1 \setminus A_2$使$f(a) = b$，故$b \in f(A_1 \setminus A_2)$。

等式不成立，如$f(A_1) = \{c\}$，$f(A_2) = \{c\}$，$A_1 \setminus A_2 \neq \phi$，则$f(A_1 \setminus A_2) = \{c\}$，但$f(A_1) \setminus f(A_2) = \{c\} - \{c\} = \phi$。

2. a. $f: A\to B$ 为非到上的单射。

b. $f: A\to B$ 为到上的非单射。

c. 设 $A=\{a, b\}$, $A_1=\{a\}$, $B=\{a, b\}$, 令 $f(A)=\{a\}$, 则 $f(A\setminus A_1)=\{a\}$, $B\setminus f(A_1)=\{b\}$。

3. $b\in f(A\cap f^{-1}(B))\Longleftrightarrow$ 有 $a\in A\cap f^{-1}(B)$, 使 $f(a)=b\Longleftrightarrow b\in f(A)\cap B$。

4. $a\to b$. 设 $y\in G(G^{-1}(B_1))$, 则有 $x\in G^{-1}(B_1)$ 使 $y\in G(x)$ 因 $x\in G^{-1}(B_1)$, 故有 $y'\in B_1$ 使 $G(x)\ni y'$。由 (a) $y=y'$ 故 $y\in B_1$。

$b\to c$, $G^{-1}(B_1\cap B_2)\subset G^{-1}(B_1)\cap G^{-1}(B_2)$ 是显然的，只须证明 $G^{-1}(B_1\cap B_2)\supset G^{-1}(B_1)\cap G^{-1}(B_2)$。

$x\in G^{-1}(B_1)\cap G^{-1}(B_2)\Longleftrightarrow x\in G^{-1}(B_1)$ 且 $x\in G^{-1}(B_2)\Longrightarrow G(x)\subset G(G^{-1}(B_1))$ 且 $G(x)\subset G(G^{-1}(B_2))\Longrightarrow G(x)\subset B_1$ 且 $G(x)\subset B_2\Longleftrightarrow G(x)\subset B_1\cap B_2\Longrightarrow x\in G^{-1}(G(x))\subset G^{-1}(B_1\cap B_2)$。

$c\to d$ $G^{-1}(B_1)\cap G^{-1}(B_2)=G^{-1}(B_1\cap B_2)$

$=G^{-1}(\phi)=\phi$。

$d\to a$. 对 $b_1\in pr_2(G)$, $b_2\in pr_2(G)$ 且 $b_1\neq b_2$(即 $\{b_1\}\cap\{b_2\}=\phi)\Longrightarrow G^{-1}(b_1)\neq G^{-1}(b_2)$ (即 $G^{-1}(b_1)\cap G^{-1}(b_2)=\phi$), 所以 G 是 A 的子集到 B 的映射的图象。

§5 满射、单射

1. $a\to b\to c\to d\to e\to a$。

2. 显然 g, h 是满射, f, g 是单射。若 f 不是满射, 则 $g\circ f$ 不是双射; 若 h 不是单射, 则 $h\circ g$ 不是双射。

3. 类似于2题, f, g, h 分别讨论。

4. 满射是显然的, 单射可用反证法。

5. 作 A 的子集 M, 使 $M\supset(A-g(B))\cup(g\circ f)(M)$, 再作满足上述条件的 M 的交, 设为 A_1, 令 $A_2=A-A_1$, $B_1=f(A_1)$,

$B_2 = B - B_1$。只须证 $g(B_2) = A_2$。

∵ $g: B_1 \to g(x)$ A_2为双射（否则，有 $a \in g(B) - A_2$，但 $a \overline{\in} g(B_1)$，令 $M' = A_1 - \{a\}$，则 $M' \subset A_1$ 显然 $M' \supset (A - g(B)) \cup (g \circ f)(M')$，这与 A_1 的取法矛盾）。又∵ g 是 B 到 $g(B)$ 的双射，∴ g 是 B_2 到 A_2 的双射，故 $g(B_2) = A_2$。

第三章 基 数

§1 等 势 性

1. 令 $y = c + (d - c)\dfrac{x - a}{b - a}$ 即可。

2. 由1题 $(0, 1)$ 与 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 等势，由 $y = \operatorname{tg} x \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 $(-\infty, \infty)$ 等势。

3. 令 $x = \cos t$，$y = \sin t\ (-\pi \leqslant t < \pi)$，则它是 $[-\pi, \pi)$ 到单位圆周上的满射。又 $[a, b)$ 与 $[-\pi, \pi)$ 等势。

4. 元素个数不同。

5. 不一定。如 $A = B = (0, 1)$，$A_1 = (0, 1)$，$B_1 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，则 $A \sim B$，$A_1 \sim B_1$，$A \setminus A_1 = \phi$，$B \setminus B_1 = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$。

§2 基数的比较

不一定。如 $A = (0, 1)$，$B = (1, 2)$，$C = \{1\}$ 时，$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A \cup C}}$。

§3 可 列 集

1. n 位小数是有限集，有限小数的全体是可列个至多可列集的并集。

2. 取M的可列子集A_1，则$M = M_1 + A_1$，$A_1 \cup A \sim A$。故$M \cup A = M_1 \cup A_1 \cup A \sim M_1 \cup A_1 = M$。

3. 应用有理数集的可列性及稠密性证之。

4. 不连续点的左右极限构成区间。

5. 可列个有限集的并集。

6. 应用可列集的特性。

7. 取M的可数子集M_1，分一半为D即可。

8. 应用有理数的稠密性证明等式两端互相包含。

9. 若A为有限集$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，令$f(a_i) = a_{i+1}$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$，$f(a_n) = a_1$，则对于$A$的任意子集，$f(B) \subset B$均不成立。

若A为无限集，$f: A \to A$，任取$a_1 \in A$，取$f(a_1) = a_2$，$f(a_2) = a_3$，$\cdots$，若有$n > m$使$a_n = a_m$，则$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = B$。否则，令$B = \{a_2, a_3, \cdots\}$即可。

10. 由有理数的稠密性，对每点x_0在δ_{x_0}邻域中取有理区间，而有理区间至多可列。

§4 连 续 集

1. 设A_1为(0, 1)中无理数集，A_2为(0, 1)中有理数集，应用§3习题2，$A_1 \cup A_2 \sim A_1$。

2. 区间端点构成二维空间点集，应用定理5推论1。

3. 做双射$\varphi: A \to Z_2$。若$\overline{\overline{B}} \neq c$，$\overline{\overline{C}} \neq c$，则有$x \in X$，$y \in Y$，使$x \overline{\in} P_x \varphi(B)$，$y \overline{\in} P_y \varphi(C)$，则$(x, y) \overline{\in} \varphi[B] \cup \varphi[C] = \varphi[B \cup C] = \varphi[A] = Z_2$，矛盾。

4. 应用二进制小数表示法。

5. 可列个2元集的直积的势为$c \leqslant$可列个可列集的直积的势$\leqslant$可列个c集的直积的势为c。

6. 实数序列的全体Q的势为c，$A \sim Q$。将A看作Q，若$\overline{\overline{A}}$.

$<C$，则第 n 个坐标必有实数 a_n 不出现。则 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = a \in A$。但 $a \overline{\in} A_n$，矛盾。

§5 不同势的存在

1. 因 $\overline{\overline{B}} > 1$，故有 $\{b_1, b_2\} \subset B$。对任意 $a_\alpha \in A$，做映射 f_α 使 $f_\alpha(a_\alpha) = b_1$，$f_\alpha(a_\beta) = b_2(\alpha \neq \beta)$。设 $C = \{f_\alpha\}$，则 $C \subset B^A$，$f_\alpha \neq f_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$，$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$，$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}^A$。

应用定理 1 的证明方法再证等号不成立。

应用 A 的幂集 $p(A)$ 直接证明亦可。

2. 直线上所有函数的族是平面幂集的子族，故 $f \leqslant 2^c$。直线的幂集等势于每个子集的特征函数的族，故 $2^c \leqslant f$。

§6 基数的运算

1. $2^c \leqslant n^c \leqslant c^c = f = 2^c$。

2. 由概念可直接推得。

3. 设 $\overline{\overline{A}}_\lambda = a_\lambda$，$A_\lambda \cap A_\mu = \phi$，$\lambda, \mu \in D$，$\lambda \neq \mu$；再设 $\overline{\overline{B}}_\lambda = \beta_\lambda$，$B_\lambda \cap B_\mu = \phi$，$\lambda, \mu \in D$，$\lambda \neq \mu$，$A = \sum\limits_{\lambda \in D} A_\lambda$，$B = \prod\limits_{\lambda \in D} B_\lambda$。因 $\alpha_\lambda < \beta_\lambda$，可将 A_λ 看做 B_λ 的子集，令 $C_\lambda = B_\lambda - A_\lambda$，在 B 中取 (c_λ) 使 $c_\lambda \in C_\lambda$，观察 $A_\lambda = \{(x_\lambda)$：当 $\lambda = \lambda_0$ 时为 $a_\lambda \in A_\lambda$ 当 $\lambda \neq \lambda_0$ 时为固定的 $c_\lambda\}$。则 $A_\lambda' \subset B$，$\overline{\overline{A'}}_\lambda = \alpha_\lambda$，$A'_\lambda \cap A'_\mu = \phi$ $(\lambda \neq \mu)$，$\sum A'_\lambda \sim A$，故 $\sum\limits_{\lambda \in D} \alpha_\lambda = a \leqslant \beta = \prod\limits_{\lambda \in D} \beta_\lambda$。

另方面，设 $P = \sum\limits_{\lambda \in D} P_\lambda$ 为 B 的子集，$P_\lambda \sim A_\lambda$。在 P_λ 中观察

$$p_\lambda = (b_{\lambda\alpha})$$

令 $\{b_{\lambda\lambda}\} = D_\lambda$，则 $D_\lambda \subset B_\lambda$，$\overline{\overline{D}}_\lambda \leq \alpha_\lambda$。设 $B_\lambda = D_\lambda + E_\lambda$，取 $e_\lambda \in E_\lambda$ $(\lambda \in D)$ 做元素 $p = (e_\lambda)$，则 $e_\lambda \neq b_{\lambda\lambda}$，而 p 与所有 p_λ 都不相同，故 $p \overline{\in} P$。故 $P = B$ 是不可能的。

第四章　序　数

§1　序　　型

1. 由相似变换的定义推得。

2. 设φ为A到B的相似变换，A为序完备的，B_1为B的有上界的子集，令$A_1=\{a:\varphi^{-1}(b)=a,\ b\in B_1\}$，则$A_1$有上确界$a_1$，$\varphi(a_1)$为$B_1$的上确界。

3. 设$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\cdots\}$，在$B$中任取元素$b_1$，按$a_1$，$a_2$间的序关系取$b_2$。若已取得$b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_n$，保持着$a_1$，$a_2,\cdots$，$a_n$间的序关系，再取$b_{n+1}$使$b_{n+1}$与$b_i$（$i\leqslant n$）之间的序关系与$a_{n+1}$与$a_i$（$i\leqslant n$）间的序关系一致。如此可取得相似于$A$的$B$的序子集。

4. 设$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$，$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$，取$a_1-a_{n_1}$，$b_1-b_{n_1}$，$a_2-a_{n_2}$，在B中按a_{n_1}，a_{n_2}的序关系取b_{n_2}，若$b_{n_2}=b_2$则取$b_{n_3}=b_3$，否则取$b_{n_3}=b_2$。再在A中按b_{n_3}与b_{n_1}，b_{n_2}的序关系取a_{n_3}，若$a_{n_3}=a_3$，则取$a_{n_4}=a_4$，否则取$a_{n_4}=a_3$。如此交替作下去。作出

$$A'=\{a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots\},\qquad B'=\{b_{n_1},\ b_{n_2},\ \cdots\}$$

$A'=A$，　$B'=B$，　$A\simeq B$。

5. 设B为η型全序集，则B为可列集，应用第3题可证得。

6. 用第5题。

7. $\varphi(a)=A_a$。

§2　序型的运算

1. $\omega+\omega^2=\omega(1+\omega)=\omega\cdot\omega=\omega^2$，

$\omega^2+\omega=\omega(\omega+1)$。因$\omega+1\neq\omega$，故$\omega+\omega^2\neq$
$\omega^2+\omega$。

2. $(\omega+\omega)\omega=(\omega\cdot 2)\omega=\omega\cdot(2\omega)=\omega\cdot\omega$.
$\omega(\omega+\omega)=\omega\cdot\omega\cdot 2$。

3. $n\omega=\omega$ 而$\omega n\neq\omega$。

4. 因$n+\omega=\omega$，故$n+\omega+\omega=\omega+\omega$。

5. $\omega+\omega^*$有最前元和最后元。
$\omega^*+\omega$无最前元和最后元。

6. 由序型加法运算定义可得。

7. $(\mu+\nu)^*=\widetilde{A+B}^*=\widetilde{B}^*+\widetilde{A}^*=\nu^*+\mu^*$。

8. $1+\omega+\omega^2+\omega^3=(1+\omega)+\omega^2+\omega^3$
$=\omega+\omega^2+\omega^3=\omega(1+\omega)+\omega^3$
$=\omega^2+\omega^3=\omega^2(1+\omega)=\omega^3$。

§3 良 序 集

1. 有限良序集不能与其真子集等势，当然不相似。设A为无限良序集，最前元素为a_1，令$A_1=A\setminus\{a_1\}$；设$B=\{b: b\in A, b$无直前元$\}$；设b_1为首元素，令$Ab_1=\{a: a\in A, a<b_1\}$，则

$A=Ab_1\cup B$，　$B=A\setminus Ab_1$，
$A_1=Ab_1\setminus\{a_1\}\cup B$。

作$\varphi: A\to A_1$为当$a\in Ab_1$时，$\varphi(a)=a+1$。当$a\in B$时，$\varphi(a)=a$。则φ为相似对应。

2. ω^*型子集没有最前元，故充分性成立。若A不是良序集，任取a_1，有$a_2\in A$，使$a_2<a_1$，… 对a_n，有$a_{n+1}\in A$，使$a_{n+1}<a_n$。于是得到ω^*型子集。

3. 实数集无最前元素，故不是良序集。设A_0为实数集的良序子集，若A_0不可列，则A_0有凝聚点。设a_0为A_0的凝聚点集的最前元，则A_0的子集$\{x: a_0<x, x\in A_0\}$无最前元素，矛盾。

4. 令$B=\{x: x\in A\setminus C\}$，$x_0$为$B$的最前元素，则$A_{x_0}\subset A\cap C$。由条件$x_0\in C$，矛盾。

5. 作$B=\{x: x\in A$，x不具有性质$P\}$，B有最前元素a_0。A_{a_0}上每点都具有性质P，由条件在a_0也具有性质P，矛盾。故$B=\phi$。

§4 序　　数

1. 设$\widetilde{A}=\mu$，$\widetilde{B}=v$，$\widetilde{C}=\xi$，$A\cap C=\phi=B\cap C$，$\because \mu<v$，$\therefore A\simeq B_b$（某$b\in B$）。由全序和定义

$$\xi+\mu=\widetilde{C+A}=\widetilde{C+B_b}<\widetilde{C+B}=\xi+v.$$

$$\mu+\xi=\widetilde{A+C}=\widetilde{B_b+C}\leqslant\widetilde{B+C}=v+\xi.$$

等号可能成立。如$\mu=\omega$，$v=\omega+1$，$\xi=\omega$。

2. 设$\widetilde{A}=\mu$，$\widetilde{B}=v$，$\widetilde{C}=\xi$，$\xi\mu=\widetilde{A\times C}=\widetilde{B_b\times C}$，（$A\simeq B_b$，$b\in B$），$\because B_b\times C\subset B\times C$，$\therefore \widetilde{B_b\times C}<\widetilde{B\times C}=\xi v$。（因$B_b\times C$是$B\times C$的截段，故等号不成立）。

$\mu\xi=\widetilde{C\times A}=\widetilde{C\times B_b}$，$v\xi=\widetilde{C\times B}$ $\therefore \mu\xi\leqslant v\xi$。等号可能成立。如$\mu=\omega$，$v=\omega+\omega$，$\xi=\omega$，则$\mu\xi=\omega\cdot\omega$，$v\xi=(\omega+\omega)\omega=\omega\cdot 2\omega=\omega\cdot\omega$。

3. 设$\widetilde{A}=\mu$，$\widetilde{B}=v$，$\widetilde{A_a}=v$，令$\widetilde{A\setminus A_a}=\xi$，则$\mu=v+\xi$。若$\mu=v+\xi'$，则$\xi=\xi'$。

设$\mu=\omega$，$v=1$，$v<\mu$，而满足$\eta+v=\mu$的η不存在。序数为μ的集无最后元而序数为$\eta+v$的集有最后元。

4. 对任意$\xi<\gamma$，恒有$\mu+\xi<\mu+\gamma$，故$\sup\{\mu+\xi,\ \xi<\gamma\}\leqslant\mu+\gamma$。若等号不成立，则有$\eta$满足$\sup\{\mu+\xi,\ \xi<\gamma\}\leqslant\eta<\mu+\gamma$，则$\eta+1$仍为$\mu+\xi$型（由3题），$\xi<\gamma$（$\gamma$为极限序数），矛盾。

§5 可列超限数

1. a. $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。

b. $\{0\}\cup\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$的序型为$1+\omega=\omega$,

$\left\{-1, -\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{n}, \cdots\right\}\cup\{0\}$的序型为$\omega+1$。

c. $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{n}, \cdots\right\}\cup\{1, 2, 3, \cdots\}$的序型为$\omega+\omega=\omega\cdot 2$。

$\{1, 2\}\cup\{3, 4\}\cup\cdots\cup\{2n-1, 2n\}\cup\cdots$的序型为$2\cdot\omega=\omega$。

d. $\{0.1, 0.11, \cdots\}\cup\{1.1, 1.11, \cdots\}\cup\cdots\cup\{n.1, n.11, \cdots\}\cup\cdots$的序型为$\omega\cdot\omega=\omega^2$。

e. $(2(\omega+1))^2=(2\omega+2)^2=(\omega+2)^2=(\omega+2)\omega+(\omega+2)\cdot 2$。

$$\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \cdots, -\frac{n+1}{n}, \cdots\right\}\cup\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}\cup$$

$$\left\{-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2}, -\frac{1}{2^2}\cdot\frac{4}{3}, -\frac{1}{2^2}\cdot\frac{5}{4}, \cdots, -\frac{1}{2^2}\cdot\frac{n+1}{n}, \cdots\right\}\cup\left\{-\frac{1}{2^2},\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2^3}\right\}\cup\left\{-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{3}{2}, -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{4}{3}, -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{5}{4}, \cdots, -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{n+1}{n}, \cdots\right\}$$

$$\cup\left\{-\frac{1}{2^4}, -\frac{1}{2^5}\right\}\cup\cdots\cup\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}\cup\{1, 2\}$$

$$\cup\left\{2+\frac{1}{2}, 2+\frac{2}{3}, 2+\frac{3}{4}, \cdots, 2+\frac{n}{n+1}, \cdots\right\}\cup\{3, 4\}$$的序型为$(\omega+2)\omega+(\omega+2)\cdot 2=(2(\omega+1))^2$。

$4(\omega+1)^2=4(\omega+1)\omega+4(\omega+1)$

$=4(\omega+1)\omega+\omega+4$。

$$\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \cdots\right\}\cup\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}\right\}\cup\left\{-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{3}{2},\right.$$

$-\frac{1}{2^4}\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2^4}\cdot\frac{5}{4}$, $\cdots\}\cup\{-\frac{1}{2^4}$, $-\frac{1}{2^5}$, $-\frac{1}{2^6}$, $-\frac{1}{2^7}\}\cup\{-\frac{1}{2^8}\cdot\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2^8}\cdot\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{2^8}\frac{5}{4}$, $\cdots\}\cup\{-\frac{1}{2^8}$, $-\frac{1}{2^9}$, $-\frac{1}{2^{10}}$, $-\frac{1}{2^{11}}\}\cup$ $\cdots\cdots\cup\{\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\cdots\}\cup\{1, 2, 3, 4\}$的序数为$4(\omega+1)\omega+\omega+4=4(\omega+1)^2$。

f. $\{1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}$, $\cdots\}\cup\{1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7}$, $\cdots\}\cup\{1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^5}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}$, $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^8}$, $\cdots\}\cup\cdots\cdots$

$\cup\{1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7}$, $\cdots\}\cup\{1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^5}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^8}$, $\cdots\}\cup\{1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^6}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^7}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^8}$, $1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^9}$, $\cdots\}\cup\cdots$

$\cup\{2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}\cdots\}\cup\{2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7}\cdots\}\cup\cdots$

$\cup\{3, 4, 5, 6\cdots\}$的序数为$\omega^3\cdot 2+\omega$。

g. $\{1-\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{2^2}$, $1-\frac{1}{2^3}$, $1-\frac{1}{2^4}$, $1-\frac{1}{2^5}$, $\cdots\}\cup\{2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}$, $2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}$, $\cdots\}\cup\{2-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}$, $2-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}$, $2-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}$, $2-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}$, $\cdots\}\cup\{2-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}$,

$2-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5},\ 2-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6},\ 2-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7},\ \cdots\}\cup\cdots\cup\{3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3},\ 3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4},\ 3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5},\ 3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}\cdots\}\cup\{3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4},\ 3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5},\ 3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6},\ 3-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7},\ \cdots\}\cdots\cup\{3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4},\ 3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5},\ 3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6},\ 3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7}\cdots\}\cup\{3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^5},\ 3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6},\ 3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7},\ 3-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^8},\ \cdots\}\cdots\cup\{n-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}\cdots-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n},\ n-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}\cdots\cdots-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}},\ \cdots\}\cdots$ 的序数为 $\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^n+\cdots=\omega^\omega$。

2．设 B 为可列良序集，$\overline{\overline{B}}=\mu$，根据§1第3题 B 相似于有理数集的序子集 A。

3．a．若 $\varphi(\mu)<\varphi(v)$ 则必须有 $\mu<v$，否则，若 $\mu>v$ 由（b）必有 $\varphi(v)\leqslant\varphi(\mu)$ 矛盾。若 $\mu=v$，则 $\varphi(\mu)=\varphi(v)$ 亦矛盾。

b．设 $\widetilde{A}=\mu$，$\widetilde{B}=v$，因 $\mu<v$，故有 $b\in B$，使 $A\simeq B_b$，故 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B_b}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，即 $\varphi(\mu)\leqslant\varphi(v)$。

反例 $\varphi(\omega+n)=\varphi(\omega+m)$。

4．根据定理3 $\sup\limits_{i\in N}\{\mu_i\}\in Z_1$，根据 ω_1 的定义得证。

5．对应 $\varphi(\mu)$ 的集合 $\mathfrak{N}$，有 μ 的集合 $\mathfrak{M}$。由§4定理3推论1，$\mathfrak{M}$ 是良序集。故有最前元素 μ_0。则 $\varphi(\mu_0)$ 为 $\mathfrak{N}$ 的最前元素。

第六章 格

§1 格的各种性质

1. 若 $x \in A$，有

$$x \cap x = x \cap (x \cup (x \cap y)) \quad \text{（由定理2性质4）}$$
$$= x \quad \text{（由定理1性质4）}$$
$$x \cup x = x \cup (x \cap (x \cup y)) \quad \text{（由定理1性质4）}$$
$$= x \quad \text{（由定理2性质4）}$$

所以满足定理1及定理2的性质1（幂等律），故 $(A, \cap, \cup)$ 是格。

2. 设有限集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$L=(A, \leqslant)$ 为格，则 $a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$ 是格 L 的最大元。$a_1 \cap a_2 \cap \cdots \cap a_n$ 是 L 的最小元。

3. 对于 $(a_1, b_1) \in A \times B$，$(a_2, b_2) \in A \times B$，当 $a_1 \leqslant a_2$ 且 $b_1 < b_2$ 时，规定 $(a_1, b_1) \leqslant' (a_2, b_2)$。则"$\leqslant'$"为 $A \times B$ 上的序关系，而 $(A \times B, \leqslant')$ 构成格，其中：

$$(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) = (a_1 \cup a_2, b_1 \cup b_2)。$$

4. 此有序集显然是格，且 a 为最小元，e 为最大元。a、b、c、d、e 的补元分别为 e、c、b、b、a。所以此有序集是相补格。

由 $c \leqslant d$，而 $(d \cap b) \cup c = a \cup c = c$，$d \cap (b \cup c) = d \cap e = d > c$，所以此有序集不是模格。

5. 此有序集显然是格，且 a 为最小元，e 为最大元，a、b、c、d、e 的补元分别为 e、c、d、b、a。所以为相补格。又模律成立，所以又是模格。

但 $(b \cap c) \cup (b \cap d) = a \cup a = a$，$b \cap (c \cup d) =$

$b \cap e = b > a$，所以它不是分配格。

6．若模律成立，则由 $(x \cap z) \leqslant x$ 得 $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup (x \cap z))$。

反之，若 $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup (x \cap z))$ 成立，则对 $z \leqslant x$ 有 $x \cap z = z$，所以 $(x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z)$。

7．分配律⇒1′、2′

$$\begin{aligned}
&(x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x) \\
&= (x \cap y) \cup (z \cap (x \cup y)) && \text{（由结合律、分配律）} \\
&= ((x \cap y) \cup z) \cap ((x \cap y) \cup (x \cup y)) && \text{（由分配律）} \\
&= (x \cup z) \cap (y \cup z) \cap (x \cup y) && \text{（由分配律）} \\
&= (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x) && \text{（由交换律）}
\end{aligned}$$

若 $x \cap y \leqslant z$，且 $x \leqslant y \cup z$ 时，

$$\begin{aligned}
x &= x \cap (x \cup y) \cap (x \cup z) && \text{（由吸收律）} \\
&\leqslant (y \cup z) \cap (x \cup y) \cap (x \cup z) && \text{（由2′的条件）} \\
&= (x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x) && \text{（由推得的1′）} \\
&\leqslant z \cup (y \cap z) \cup (z \cap x) && \text{（由2′的条件）} \\
&= z && \text{（由吸收律）}
\end{aligned}$$

1′、2′⇒分配律

由 $x \cap (y \cup z) \cap (y \cap z) = x \cap (y \cap z) \leqslant x \cap y \leqslant (x \cap y) \cup (x \cap z)$

及

$$\begin{aligned}
x \cap (y \cup z) &= x \cap (x \cup y) \cap (x \cup z) \cap (y \cup z) \\
&\leqslant (x \cup y) \cap (x \cup z) \cap (y \cup z) \\
&= (x \cap y) \cup (x \cap z) \cup (y \cap z)
\end{aligned}$$

得 $x \cap (y \cup z) \leqslant (x \cap y) \cup (x \cap z)$

又　$x \cap (y \cup z) \geqslant (x \cap y) \cup (x \cap z)$　（由定理4）

∴　$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

同理　$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

以上证明还可得出：分配律成立的充要条件是（1′）成立。

8. 若x'、x''都为x的补元

即$x\cap x'=0, x\cup x'=1$,

$x\cap x''=0$, $x\cup x''=1$,

则 $(x\cap x')\cup(x\cap x'')\cup(x'\cap x'')=x'\cap x''$

$(x\cup x')\cap(x\cup x'')\cap(x'\cup x'')=x'\cup x''$

$\therefore$ $x'\cap x''=x'\cup x''$ （分配格满足上题1'）

$\therefore$ $x'=x''$。

9. 设$\cap_1$、$\cup_1$、$\leqslant_1$；$\cap_2$、$\cup_2$、$\leqslant_2$分别为格L_1，L_2的二运算及相应的序关系，

若x，$y\in L_1$，且$x\leqslant_1 y$

则 $f(x)=f(x\cap_1 y)=f(x)\cap_2 f(y)$

$f(y)=f(x\cup_1 y)=f(x)\cup_2 f(y)$

$\because$ $f(x)\cap_2 f(y)\leqslant_2 f(x)\cup_2 f(y)$

$\therefore$ $f(x)\leqslant_2 f(y)$ 故f为单调映射。

反之未必成立。例如格$L_1=\{0, a, b, 1\}$，序关系为$\{(0, a), (0, b), (0, 1), (a, 1), (b, 1)\}$，格$L_2=\{x, y, z\}$序关系为$\{(x, y), (x, z), (y, z)\}$，映射$f$为$\{(0, x), (a, y), (b, y), (1, z)\}$显然$f$为单调映射。但$f(a\cap b)=f(0)=x$而$f(a)\cap f(b)=y\cap y=y>x$，$\therefore f$不是$L_1$到$L_2$的格同态映射。

10. (a) 若b_1、$b_2\in f(M)$，则有a_1、$a_2\in M$，使$f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$，$b_1\cap b_2=f(a_1)\cap f(a_2)=f(a_1\cap a_2)\in f(M)$，$b_1\cup b_2=f(a_1)\cup f(a_2)=f(a_1\cup a_2)\in f(M)$，故$f(M)$为$L_2$的子格。

(b) 若a_1，$a_2\in f^{-1}(M)$，则有b_1、$b_2\in M$，使$f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$，$f(a_1\cap a_2)=f(a_1)\cap f(a_2)=b_1\cap b_2\in M$ $\therefore a_1\cap a_2\in f^{-1}(M)$，$f(a_1\cup a_2)=f(a_1)\cup f(a_2)=b_1\cup b_2\in M$，$\therefore a_1\cup a_2\in f^{-1}(M)$，故$f^{-1}(M)$为$L_1$的子格。

11. 全序集 $(A, \preceq)$ 显然是格。

若 $x, y, z \in A$，当 $x \succeq y \cup z$ 时，$(x \cap y) \cup (x \cap z) = y \cup z$，$x \cap (y \cup z) = y \cup z$ $\therefore (x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup z)$。当 $x \preceq y \cup z$ 时，$(x \cap y) \cup (x \cap z) = x$，$x \cap (y \cup z) = x$，$\therefore (x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup z)$ 故 $(A, \preceq)$ 为分配格。

12. 若格 L 为全序集，且 $A \subset L$，$A \neq \phi$ 取 $x, y \in A$（不妨设 $x \preceq y$）$x \cap y = x \in A$，$x \cup y = y \in A$，故 A 为 L 的子格。

若 L 的任意非空子集是 L 的子格，对 $x, y \in L$ 则 $\{x, y\}$ 是 L 的子格，即 $x \cap y \in \{x, y\}$，$x \cup y \in \{x, y\}$，若 $x \cap y = x \cup y$ 则 $x = y$，若 $x \cap y < x \cup y$ 则必 $x < y$ 或 $y < x$，$\therefore L$ 是全序集。

13. 同9题。

§2 完 备 格

1. (1) $\because \bigcup_{i \in I} b_i \succeq b_i$ 对所有 $i \in I$ 成立，

$\therefore a \cap b_i \preceq a \cap (\bigcup_{i \in I} b_i)$ 对所有 $i \in I$ 成立。$\therefore \bigcup_{i \in I} (a \cap b_i) \preceq a \cap (\bigcup_{i \in I} b_i)$。

(3) 令 $b_i = \bigcup_{j \in J} a_{ij}$，则 $b_i \succeq a_{ij}$ 对所有 $j \in J$ 成立。

$\therefore \bigcap_{i \in I} b_i \succeq \bigcap_{i \in I} a_{ij}$ 对所有 $j \in J$ 成立，$\therefore \bigcap_{i \in I} b_i \succeq \bigcup_{f \in J^I} (\bigcap_{i \in I} a_{if(i)})$

即：$\bigcup_{f \in J^I} (\bigcap_{i \in I} a_{if(i)}) \preceq \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{j \in J} a_{ij})$。

(2) 与 (4) 的证明分别同 (1) 与 (3)。

2. $x \in \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{j \in J} a_{ij}) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} a_{ij}$ 对所有 $i \in I$ 成立，

$\Longleftrightarrow$ 对每 $i \in I$ 有 $f(i) \in J$ 使 $x \in a_{if(i)} \Longleftrightarrow$ 有 $f(i) \in J$ 使 $x \in \bigcap_{i \in I} a_{if(i)} \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{f \in J^I} (\bigcap_{i \in I} a_{if(i)})$。

$\therefore \bigcup_{f \in J^I} (\bigcap_{i \in I} a_{if(i)}) = \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{j \in J} a_{ij})$。

同理可证 $\bigcap_{j\in J}(\bigcup_{i\in I} a_{if(i)}) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J} a_{ij})$。

故完备格（$p(A)$、$\bigcap$、$\bigcup$）中强完全分配律成立。

3. 用定理 4 的方法确定的集合为：

$$M=\{\phi、\{a\}、\{b\}、\{b、c\}、\{a、b、c\}\}$$

则（M、$\subset$）为完备格。

4. 若 B_1、$B_2\in M$，由 A 为全序集，必存在 a_1、$a_2\in A$，满足 $B_1=\{x: x\angle a_1\}$、$B_2=\{x: x\angle a_2\}$，若 $a_1\angle a_2$ 则 $B_1\subset B_2$，若 $a_2\angle a_1$，则 $B_2\subset B_1$，故（M，$\subset$）为全序集。

5. §1 例 1 中 R 不具有最小元和最大元，故不是完备格。将 ∞ 和 $-\infty$ 作为 R 的最大元及最小元添加到 R 中时，则（$\mathscr{F}$，$\angle$）是完备格。其中

$$(\bigcap_{i\in I} f_i)\ x=inf\{f_i(x): i\in I\}$$

$$(\bigcup_{i\in I} f_i)\ x=sup\{f_i(x): i\in I\}。$$

6. 有序集 $\mathscr{S}$ 用定理4的方法求出完备格L，必具有题中诸性质。其中 L 到 $\mathscr{S}$ 的映射 φ 由 $\varphi(a)=\{x: x\angle a\}$ $a\in L$ 确定。

实际上，（1）由定理 4 知，φ 是保序单射。

（2）若 $\xi\in$L，则（ξ，ξ^*）是 L 的切断，∴若 $a\in\xi$，则 $\varphi(a)\subset\xi$，于是 $\bigcup_{a\in\xi}\varphi(a)\subset\xi$，又 $a\in\varphi(a)$，于是 $\xi\subset\bigcup_{a\in\xi}\varphi(a)$，故，$\xi=\bigcup_{a\in\xi}\varphi(a)$，即，$\xi=sup\,\varphi(\xi)$。

类似可证 $\xi=inf\,\varphi(\xi^*)$。

（3）对 $\mathscr{S}$ 的任意元 ξ，令 $f(\xi)=sup\,\varphi'(\xi)$，若 $\xi_1\subset\xi_2$，则 $\varphi'(\xi_1)\subset\varphi'(\xi_2)$ ∴$sup\,\varphi'(\xi_2)\leqslant sup\,\varphi'(\xi_1)$ 即 $f(\xi_2)\angle f(\xi_1)$，故 f 为有序映射。

又，对 L 的任意元 a，$(f\circ\varphi)(a)=f(\varphi(a))=sup\,\varphi'(\varphi(a))=sup\{\varphi'(x), x\angle a\}=\varphi'(a)$，故 $f\circ\varphi=\varphi'$。

§3 模格

1. 假定格 L 不是模格，由定理 1 L 必具有§1 习题 4 形式的子

格，即L有子格$(A, \angle)$，其中$A=\{a, b, c, d, e\}$，“$\angle$”为$\{(a, b)$ (a, c), $(a\ d)$, (d, e) (b, e), (c, d), (c, e), $(d, e)\}$。

由题意，对b、$d\in A\subset L$有映射$f_{bd}:[b, e]\to[a, d]$，$f_{bd}(x)=x\cap d$及$g_{bd}:[a, d]\to[b, e]$，$g_{bd}(x)=x\cup b$。对于$c\in[a, d]$，$(f\circ g)(c)=f(c\cup b)=f(e)=e\cap d=d\neq c$。可见$f_{bd}$与$g_{bd}$不是互为逆映射。故格$L$为模格。

2. 若L是模格，即对x、y、$z\in L$，且$z<x$有$(x\cap y)\cup z=x\cap(y\cup z)$。在$L$的对偶格$L'$中$x<z$，显然$(x\cup y)\cap z=x\cup(y\cap z)$成立，故$L'$为模格。

若A为模格L的子格，对$x\ y\ z\in A\subset L$，且$z<x$则$(x\cap y)\cup z=x\cap(y\cup z)$成立，$\therefore A$为模格。

若$(A, \angle)$、$(B, <)$为二模格，由§1习题3可知：$(A\times B, \angle')$仍为格，且对(a_1, b_1)、(a_2, b_2)、$(a_3, b_3)\in A\times B$，及$(a_3, b_3)\angle'(x_1 y_1)$时，有

$$((a_1, b_1)\cap(a_2, b_2))\cup(a_3, b_3)$$
$$=((a_1\cap a_2)\cup a_3, b_1\cap(b_2\cup b_3))$$

$(a_1, b_1)\cap((a_2, b_2)\cup(a_3, b_3))=(a_1\cap(a_2\cup a_3), b_1\cap(b_2\cup b_3))$。

而$(a_1\cap a_2)\cup a_3=a_1\cap(a_2\cup a_3)$，$(b_1\cap b_2)\cup b_3=b_1\cap(b_2\cup b_3)$，

$$\therefore ((a_1, b_1)\cap(a_2, b_2))\cup(a_3, b_3)$$
$$=(a_1, b_1)\cap((a_2, b_2)\cup(a_3, b_3))。$$

故$A\times B$为模格。

3. 若L为模格，由$a\succeq b$得$(b\cap c)\cup a=b\cap(c\cup a)$，而$(b\cap c)\cup a=(a\cap c)\cup a=a$，$b\cap(c\cup a)=b\cap(c\cup b)=b$，$\therefore a=b$。

反之，对$a\succeq b$，及$a\cup c=b\cup c$，$a\cap c=b\cap c$时，有，

$b\cap(c\cup a)=b\cap(c\cup b)=b$，$(b\cap c)\cup a=(a\cap c)\cup a=a$，由$a=b$则$(b\cap c)\cup a=b\cap(c\cup a)$。故$L$是模格。

4. 假定d不是c的后继元，即存在$x\in L$，有$c<x<d$。由(a, b)与(c, d)是可互相转置的，可知$\{a, b, c, d, x\}$是L的子格，此子格为§1习题4的形式，由§3定理1知这与L是模格矛盾。

5. 设C_1：$a=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n=b$为连结$a$和$b$的组成列，用细分定理的做法做出链

c_1：$a=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n=b$

c_2：$a<x<b$

的互相等价细分为：

D_1：$(a=)\ a_{10}\leq a_{11}\leq a_{12}\leq a_{21}\leq a_{22}\leq a_{31}\leq\cdots\leq a_{(n-1)2}\ (=b)$

D_2：$(a=)x_{10}\leq x_{11}\leq x_{12}\leq x_{13}\leq\cdots\leq x_{1(n-1)}=x\leq x_{21}\leq x_{22}\leq\cdots\leq x_{2(n-1)}\ (=b)$

$\because$ C_1为组成列(即a_{i+1}是a_i的后继元)，同时$a_{i2}=a_{i+1}$，$\therefore$二式$a_{i1}=a_{i2}$与$a_{i1}=a_{(i-1)2}$ $(i=1, 2, \cdots, (n-1))$必有且只有一个成立。于是链D_1中有$(n-1)$处相邻二元是相等的，由D_1与D_2是等价的，$\therefore D_2$中也必有且只有$(n-1)$处相邻二元是相等的。将D_2中相等元只留一个，则得到长度为n的含x的链E。显然E与C_1是等价的。$\because C_1$是连结a和b的组成列，$\therefore E$也是连结a和b且含x的组成列（参考前题）。

§4 分 配 格

1. 若L是分配格，即对$x, y, z\in L$，有$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)$与$x\cup(y\cap z)=(x\cup y)\cap(x\cup z)$。在$L$的对偶格$L'$中，显然为$x\cup(y\cap z)=(x\cup y)\cap(x\cup z)$与$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)$。故$L'$为分

配格。

若A为分配格L的子格，对 $x, y, z \in A \subset L$， 则分配律仍然成立，故A为分配格。

若$(A, \preceq)$、$(B, <)$ 为二分配格，由§1习题3可知，$(A\times B, \preceq')$仍为格。且对(a_1, b_1)、(a_2, b_2)、$(a_3, b_3) \in A\times B$，

$$(a_1, b_1)\cap((a_2, b_2)\cup(a_3, b_3))$$
$$=((a_1\cap(a_2\cup a_3)), b_1\cap(b_2\cup b_3)),$$
$$((a_1, b_1)\cap(a_2, b_2))\cup((a_1, b_1)\cap(a_3, b_3))$$
$$=((a_1\cap a_2)\cup(a_1\cap a_3), (b_1\cap b_2)\cup(b_1\cap b_3))$$

而$a_1\cap(a_2\cup a_3) = (a_1\cap a_2)\cup(a_1\cap a_3)$，$b_1\cap(b_2\cup b_3) = (b_1\cap b_2)\cup(b_1\cap b_3)$，

$\therefore (a_1, b_1)\cap((a_2, b_2)\cup(a_3, b_3)) = ((a_1, b_1)\cap(a_2, b_2))\cup((a_1, b_1)\cap(a_3, b_3))$故$(A\times B, \preceq')$为分配格。

2. 由§1习题7已经证得：分配律⇨(2′)。下面只须证明：(2′)⇨分配律成立。

首先证明(2′)成立的格L必为模格。对$x, y, z\in L$且$z\preceq x$，

$\because \quad x\cap(y\cup z)\cap y = x\cap y \preceq (x\cap y)\cup z$

$\quad (x\cap y)\cup z\cup y = y\cup z \succeq x\cap(y\cup z)$，

$\therefore \quad x\cap(y\cup z)\preceq(x\cap y)\cup z$。

又由$z\preceq x$，得$x\cap(y\cup z)\succeq(x\cap y)\cup z$ (§1 定理4)

$\therefore \quad x\cap(y\cup z) = (x\cap y)\cup z$，即模律成立。

若L不满足分配律，由§4定理1知L必存在形如§1习题5的子格，此子格中，$b\cap c = a < d$，$d\cup c = e > b$，但$b\preceq d$不成立，这与(2′)矛盾。所以L满足分配律。

3. 有限格的滤子的元素是有限的，滤子的所有元的交为此滤子的最小元。

4. 若J是对偶滤子，由$a\in J$与

$a\cup(a\cap b)=a\in J$，$\therefore a\cap b\in J$。

反之，对a、$b\in J$，由J是子格，有$a\cup b\in J$。对$x\cup y\in J$，$x\in L$，由条件有$(x\cup y)\cap x\in J$，即$x\in J$。同理$y\in J$。故J是对偶滤子。

5. 图所表示的格中，质滤子有：$\{1\}$、$\{c, f, h, 1\}$、$\{e, g, h, 1\}$、$\{a, c, d, f, g, h, 1\}$、$\{b, d, e, f, g, h, 1\}$等，其中后两个都是极大质滤子。

6. 若分配律成立，对u_1、$u_2\in L$，有

$$(u_1\cap u_2)\cup x=(u_1\cup x)\cap(u_2\cup x)$$

$$(u_1\cup u_2)\cup x=(u_1\cup x)\cup(u_2\cup x),$$

即对应于$u\cup x$的映射是L到L的同态映射，同理对应于$u\cap x$的映射也是L到L的同态映射。

反之，若$u\cup x$，与$u\cap x$均为L到L的同态映射，对u_1、u_2、$u_3\in L$，以u_3做为任意确定元素x，则$(u_1\cup u_2)\cap u_3=(u_1\cap u_3)\cup(u_2\cap u_3)$，$(u_1\cap u_2)\cup u_3=(u_1\cup u_3)\cap(u_2\cup u_3)$，即分配律成立。

7. 若格L为全序集，F为L的滤子，对$x\cup y\in F$，由L是全序集，不妨设$x\leq y$，则$x\cup y=y\in F$，$\therefore F$是质的。

反之，若L的滤子都是质滤子，则L是全序集。实际上，假定L不是全序集，必存在二元x、$y\in L$且$x\cup y\neq x$，$x\cup y\neq y$，集$F=\{z: z\geq x\cup y, z\in L\}$，显然是$L$的滤子，由$x\cup y\in F$，但$x\overline{\in}F$，$y\overline{\in}F$，$\therefore F$不是质滤子。所以$L$是全序集。

8. 若F是滤子，当$x\in F$，$y\in F$时，有$x\cap y\in F$，当$x\in F$，$x\leq y$时，$\because x\cap y=x\in F$，$\therefore y\in F$。

反之，$\because x\in F$，$y\in F$有$x\cap y\in F$。另外对$x\cap y\in F$，由$x\cap y\leq x$，及$x\cap y\leq y$，$\therefore x\in F$，$y\in F$，故F是滤子。

9. 若J是质滤子，对a、$b\in L-J$，由于J是质滤子，$\therefore a\cup b\overline{\in}J$，即$a\cup b\in L-J$。反之对$a\cup b\in L-J$由$(a\cup b)\cap a=a$，$(a\cup b)\cap b=b$，J是滤子，$\therefore a\overline{\in}J$，$b\overline{\in}J$，即$a$

$\in L-J$，$b\in L-J$，于是得 $L-J$ 是对偶滤子。又对 $a\cap b\in L-J$，即 $a\cap b\overline{\in}J$，$\therefore$ 必有 $a\overline{\in}J$ 或 $b\overline{\in}J$，即 $a\in L-J$ 或 $b\in L-J$，故 $L-J$ 是对偶质滤子。

若 $L-J$ 是对偶质滤子，对 a、$b\in J$，即 a、$b\overline{\in}L-J$，由 $L-J$ 是对偶质滤子，$\therefore a\cap b\overline{\in}L-J$，即 $a\cap b\in J$。反之，对 $a\cap b\in J$，由 $(a\cap b)\cup a=a$，$(a\cap b)\cup b=b$，$L-J$ 是对偶质滤子，$\therefore a\overline{\in}L-J$，$b\overline{\in}L-J$，即 $a\in J$，$b\in J$，$\therefore$ J 是滤子。又对 $a\cup b\in J$，即 $a\cup b\overline{\in}L-J$，$\therefore$ 必有 $a\overline{\in}L-J$ 或 $b\overline{\in}L-J$，即 $a\in J$ 或 $b\in J$。故 J 是质滤子。

§5 Boole代数

1. 由 $0\cap 1=0$，$0\cup 1=1$，$\therefore 0'=1$，$1'=0$。由 $x'\cap x=0$，$x'\cup x=1$，$\therefore (x')'=x$。

2. $x\leq y\Longleftrightarrow x\cap y=x\Longleftrightarrow x\cap(x\cap y)'=0$ (注)$\Longleftrightarrow x\cap(x'\cup y')=0\Longleftrightarrow(x\cap x')\cup(x\cap y')=0\Longleftrightarrow x\cap y'=0\Longleftrightarrow(x\cap y')'=1\Longleftrightarrow x'\cup y=1$。

注：若 $x\cap(x\cap y)'=0$，则 $x\cap y=(x\cap y)\cup 0=(x\cap y)\cup(x\cap(x\cap y)')=((x\cap y)\cup x)\cap((x\cap y)\cup(x\cap y)')=x\cap 1=x$。

3. 由§5例2知 $([a,b],\cap,\cup,{}^*,a,b)$ 仍为 *Boole* 代数，其中 $x^*=b\cap(x'\cup a)$，显然取 $y=x^*$，即满足 $x\cap y=a$，$x\cup y=b$。

又由§1习题8知 y 是唯一确定的。

4. 不定。若补元运算也是封闭的，显然 A 是 B 的子 *Boole* 代数，否则 A 不是 B 的子 *Boole* 代数。

例如，下图表示的 *Boole* 代数中

子集 $\{0,1\}$ 是子 *Boole* 代数。

子集 $\{0,a,1\}$ 不是子 *Boole* 代数。

5. $a\oplus b=(a\cap b')\cup(a'\cap b)=(b'\cap a)\cup(b\cap a')$

$$= (b \cap a') \cup (b' \cap a)$$
$$= b \oplus a。$$

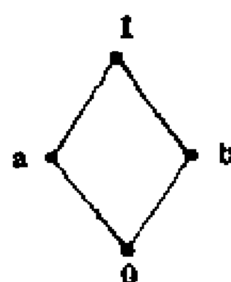


图8

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \cap ((b \cap c') \cup (b' \cap c))') \cup (a' \cap ((b \cap c') \cup (b' \cap c)))$$
$$= (a \cap (b \cap c')' \cap (b' \cap c)') \cup ((a' \cap b \cap c') \cup (a' \cap b' \cap c))$$
$$= (a \cap (b' \cup c) \cap (b \cup c')) \cup ((a' \cap b \cap c') \cup (a' \cap b' \cap c))$$
$$= (a \cap (((b' \cup c) \cap b) \cup ((b' \cup c) \cap c'))) \cup ((a' \cap b \cap c') \cup (a' \cap b' \cap c))$$
$$= (a \cap ((b \cap c) \cup (b' \cap c'))) \cup ((a' \cap b \cap c') \cup (a' \cap b' \cap c))$$
$$= ((a \cap b \cap c) \cup (a \cap b' \cap c')) \cup ((a' \cap b \cap c') \cup (a' \cap b' \cap c))$$
$$= (a \cap b \cap c) \cup (a \cap b' \cap c') \cup (a' \cap b \cap c') \cup (a' \cap b' \cap c)$$

同样 $(a \oplus b) \oplus c = (((a \cap b') \cup (a' \cap b)) \cap c') \cup (((a \cap b') \cup (a' \cap b))' \cap c)$

$$= (a \cap b' \cap c') \cup (a' \cap b \cap c') \cup (a \cap b \cap c) \cup (a' \cap b' \cap c)$$

$\therefore\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$。

$$a \oplus a = (a \cap a') \cup (a' \cap a) = 0 \cup 0 = 0$$
$$a \oplus a' = (a \cap (a')') \cup (a' \cap a') = a \cup a' = 1$$
$$a \oplus 1 = (a \cap 1') \cup (a' \cap 1) = 0 \cup a' = a'$$
$$a \oplus 0 = (a \cap 0') \cup (a' \cap 0) = a \cup 0 = a。$$

符 号 索 引

名　词　索　引（按字典序）